Mit welcher Strategie hast Du am Glücksrad Erfolg?

Kinderuni, Workshop an der TU Wien

24. Juli 2009, 10:30–11:30 Uhr

Univ.-Prof. Dr. Uwe Schmock
Forschungsgruppe Finanz- und Versicherungsmathematik
Institut für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Wien, Österreich
`http://www.fam.tuwien.ac.at/`

Programm des heutigen Workshops

- Was ist eine Aktie? Was ist ein Aktienmarkt?
- Wie funktioniert das Glücksrad?
- Strategien für das Glücksrad
- Individuelle Anwendung auf den Aktienmarkt

Regel: Wir „spielen“ während des Workshops nur am Glücksrad, wenn dies ausdrücklich gesagt wird!

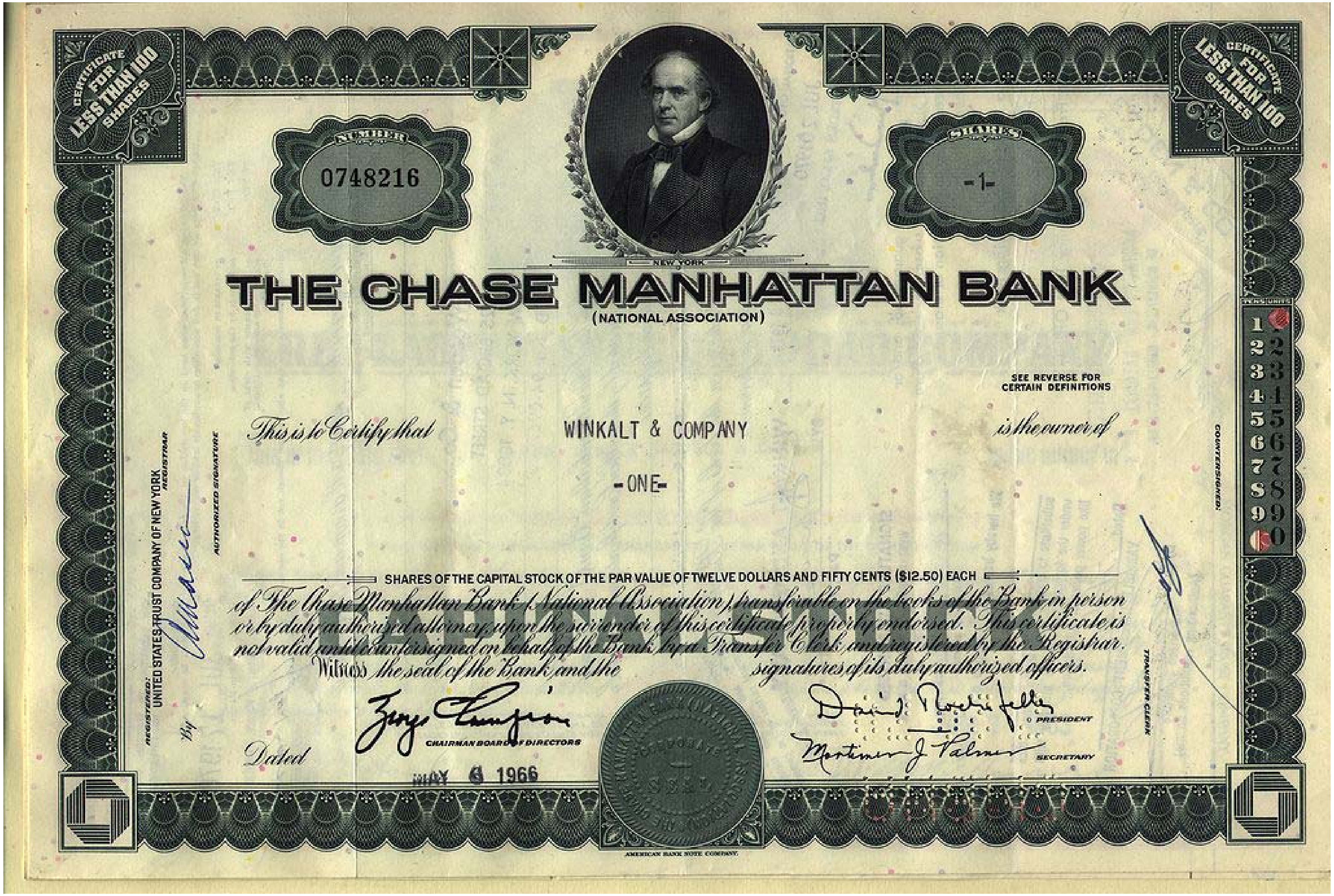
Ausblick: Wer einen Computer mit Internet-Anschluss zu Hause hat, kann dort weiterspielen.

- Glücksrad

  www.fam.tuwien.ac.at/public/simulation/wheel_de.html
- Aktienmarkt

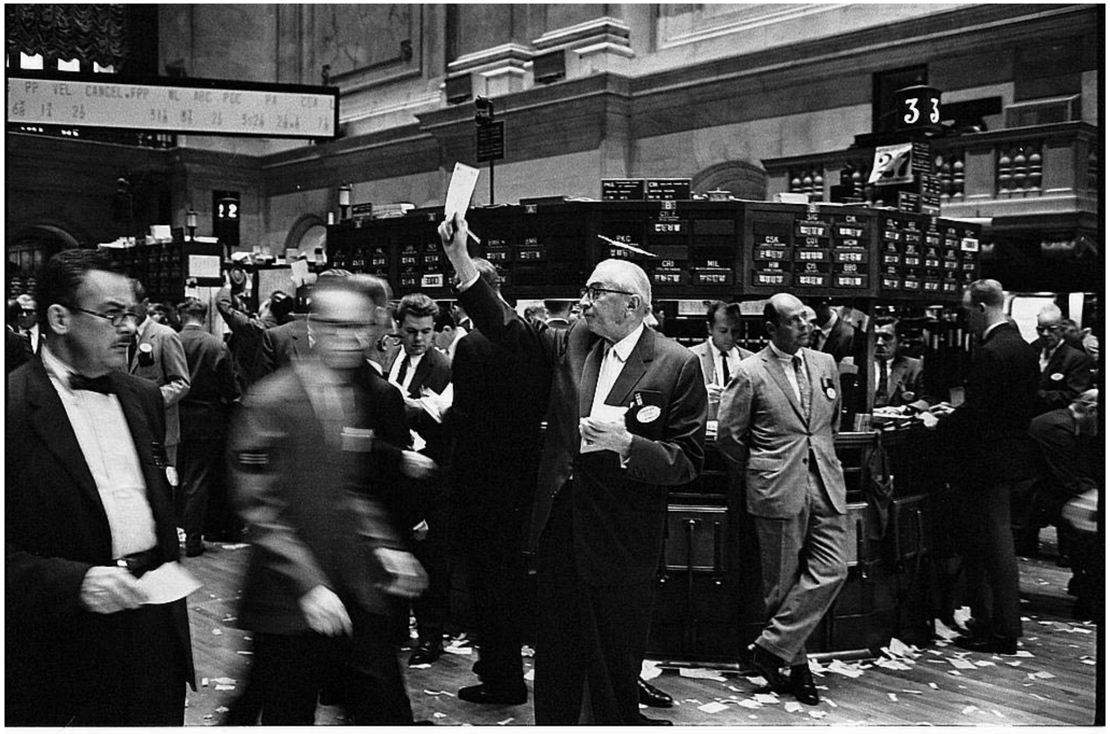
  www.fam.tuwien.ac.at/public/simulation/exchange_de.html

Was ist eine Aktie? Ein Unternehmensanteil!



Aktienbesitz und Aktienhandel

- Der Besitzer einer Aktie hat anteilsmäßigen Anspruch auf die jährlichen Gewinne und auf den Erlös beim Verkauf des Unternehmens.
- Aktien kann man am Aktienmarkt (Börse, spezieller Markt für Wertpapiere) kaufen und verkaufen.



Beispiele für Aktiengesellschaften[1]

Coca-Cola Co.

- Börsenwert ca. 118 060 000 000 US-$
  (ca. 28% des österreichischen Bruttoinlandsprodukts)
- Preis einer Aktie: 51,03 US-$ (35,53 €)

Mc Donald's

- Börsenwert ca. 64 960 000 000 US-$
- Preis einer Aktie: 58,28 US-$ (40,95 €)

---

[1] Schlusskurse vom 20. Juli 2009 aus der FAZ

Aktienhandel an der Börse

Zielsetzung: Langfristig durch geschickten Aktienhandel ein großes Vermögen erwirtschaften.

Einige Probleme bei der Suche nach guten Handelsstrategien:

- Wissen alle gleich viel über die Aktiengesellschaften?
- Welche Aktienpreise sind morgen möglich?
- Welche Preise werden mit welchen Wahrscheinlichkeiten eintreten?
- Wie hängen die Aktienpreise voneinander ab?
- Wie beeinflussen die Zinssätze die Aktienpreise?

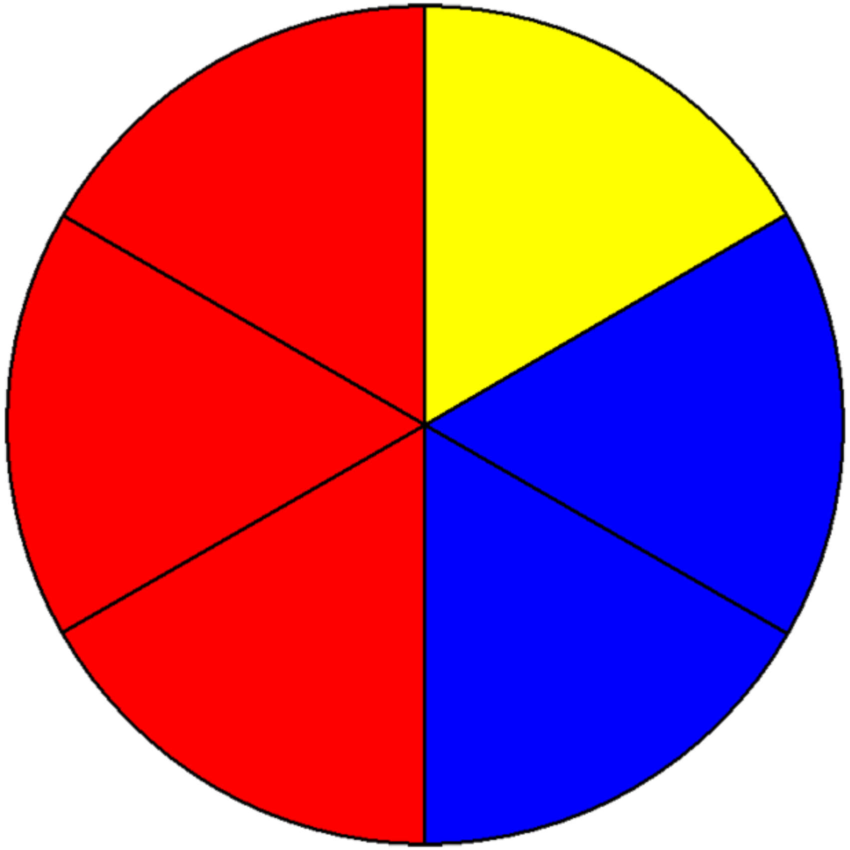
Motivation für das (virtuelle) Glücksrad

Übersichtliches (Spiel-)Modell für das fokussierte Studium von Handelsstrategien

Vorteile:

- Bei jeder Runde sind genau bekannt:
  - Einsätze ($=$ Verlustmöglichkeiten, frei wählbar),
  - mögliche Gewinne,
  - Gewinnwahrscheinlichkeiten.
- Bei jeder Runde neues Spiel und neues Glück:
  Keine Einflüsse der Vergangenheit auf das Glücksrad (stochastische Unabhängigkeit der Runden).

Gewinnwahrscheinlichkeiten am Glücksrad



Alle sechs Felder sind gleich groß, also kommt jedes mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

Drei Felder sind rot,
also ist $p_{\mathsf{r}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit für rot.

(p für englisch probability)

Zwei Felder sind blau, also $p_{\mathsf{b}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Ein Feld ist gelb, also $p_{\mathsf{g}} = \frac{1}{6}$.

Konditionen am (virtuellen) Glücksrad

- Start zur Zeit $t = 0$ mit Vermögen $V_0 = 300\,€$.
- Einsätze in beliebigen Anteilen des Vermögens
  (mit Schiebereglern in vollen Prozenten sowie den Anteilen 1/6, 1/3, 2/3 und 5/6, jeweils auf volle Cent gerundet).
- Drei Möglichkeiten für Einsätze und Gewinne:

Farbe	Gewinnhöhe	Wahrscheinlichkeit
rot	$3 \times$ Einsatz E_{r}	$p_{\mathrm{r}} = 1/2$
blau	$2 \times$ Einsatz E_{b}	$p_{\mathrm{b}} = 1/3$
gelb	$6 \times$ Einsatz E_{g}	$p_{\mathrm{g}} = 1/6$

1. Strategie für das Glücksrad

Das gelbe Feld liefert das höchste Vielfache des Einsatzes E_{g}, nämlich $6E_{\mathrm{g}}$.

$\Longrightarrow$ Setze gesamtes Startvermögen V_0 auf gelb, also $E_{\mathrm{g}} = V_0$.

1. Strategie für das Glücksrad

Das gelbe Feld liefert das höchste Vielfache des Einsatzes E_g, nämlich $6E_\mathrm{g}$.

$\implies$ Setze gesamtes Startvermögen V_0 auf gelb, also $E_\mathrm{g} = V_0$.

Resultat: In den meisten Fällen ist das Startvermögen sofort verspielt ($\implies$ Hungertod).

$$
\begin{tikzcd}
 & V_1 = V_0 - E_\mathrm{g} + 6E_\mathrm{g} = 1\,800 \\
V_0 = 300 \arrow[ur, "p_\mathrm{g} = \frac{1}{6}"] \arrow[dr, "1 - p_\mathrm{g} = \frac{5}{6}"'] & \\
 & V_1 = V_0 - E_\mathrm{g} = 0
\end{tikzcd}
$$

2. Strategie für das Glücksrad

Wahrscheinlichkeiten sind wichtig. Wegen

$$p_{\mathsf{g}} = \frac{1}{6} < p_{\mathsf{b}} = \frac{1}{3} < p_{\mathsf{r}} = \frac{1}{2}$$

setze gesamtes Startvermögen V_0 auf rot, also $E_{\mathsf{r}} = V_0$.

2. Strategie für das Glücksrad

Wahrscheinlichkeiten sind wichtig. Wegen

$$p_{\mathsf{g}} = \frac{1}{6} < p_{\mathsf{b}} = \frac{1}{3} < p_{\mathsf{r}} = \frac{1}{2}$$

setze gesamtes Startvermögen V_0 auf rot, also $E_{\mathsf{r}} = V_0$.

Resultat: In ca. der Hälfte der Fälle ist das Vermögen sofort verspielt.

$$\begin{tikzcd}
 & V_1 = V_0 - E_{\mathsf{r}} + 3E_{\mathsf{r}} = 900 \\
V_0 = 300 \arrow[ur, "p_{\mathsf{r}} = \frac{1}{2}"] \arrow[dr, "1 - p_{\mathsf{r}} = \frac{1}{2}"'] & \\
 & V_1 = V_0 - E_{\mathsf{r}} = 0
\end{tikzcd}$$

3. Strategie für das Glücksrad

Gewinnhöhen **und** Wahrscheinlichkeiten sind wichtig.
Maximiere Erwartungswert des Vermögens nach 1. Runde

$$\mathbb{E}[V_1] = V_0 + \underbrace{3E_\mathrm{r}p_\mathrm{r} + 2E_\mathrm{b}p_\mathrm{b} + 6E_\mathrm{g}p_\mathrm{g}}_{=\text{erwarteter Gewinn (vergleiche Glücksrad)}} - E_\mathrm{r} - E_\mathrm{b} - E_\mathrm{g}.$$

Frage:
Welche Einsätze liefern den höchsten erwarteten Gewinn und damit das höchste erwartete Vermögen $\mathbb{E}[V_1]$ nach einer Runde?

Ausprobieren!

3. Strategie für das Glücksrad

Gewinnhöhen **und** Wahrscheinlichkeiten sind wichtig. Maximiere Erwartungswert des Vermögens nach 1. Runde

$$\mathbb{E}[V_1] = V_0 + 3E_\mathsf{r}p_\mathsf{r} + 2E_\mathsf{b}p_\mathsf{b} + 6E_\mathsf{g}p_\mathsf{g} - E_\mathsf{r} - E_\mathsf{b} - E_\mathsf{g}.$$

Resultat: Wegen $p_\mathsf{r} = \frac{1}{2}$, $p_\mathsf{b} = \frac{1}{3}$, $p_\mathsf{g} = \frac{1}{6}$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[V_1] &= V_0 + (3p_\mathsf{r} - 1)E_\mathsf{r} + (2p_\mathsf{b} - 1)E_\mathsf{b} + (6p_\mathsf{g} - 1)E_\mathsf{g} \\ &= V_0 + \frac{1}{2}E_\mathsf{r} - \frac{1}{3}E_\mathsf{b}.\end{aligned}$$

Einsatz auf gelb lässt $\mathbb{E}[V_1]$ unverändert, Einsatz auf blau verkleinert $\mathbb{E}[V_1]$, also setze alles auf rot. Dies ist äquivalent zur 2. Strategie. Es gilt dann $\mathbb{E}[V_1] = \frac{3}{2}V_0$.

4. Strategie: Das Glücksrad als Tresor

Aufgabe: Das gesamte Vermögen V_0 am Glücksrad setzen, aber nichts riskieren. Ist das möglich?

Ausprobieren!

4. Strategie: Das Glücksrad als Tresor

Aufgabe: Das gesamte Vermögen V_0 am Glücksrad setzen, aber nichts riskieren. Ist das möglich?

Lösung: Ja! Für die Einsätze

$$E_\mathrm{r} = \frac{1}{3}V_0, \quad E_\mathrm{b} = \frac{1}{2}V_0, \quad E_\mathrm{g} = \frac{1}{6}V_0$$

erhält man

$$\begin{aligned} 3E_\mathrm{r} &= V_0 \quad \text{falls rot gewinnt,} \\ 2E_\mathrm{b} &= V_0 \quad \text{falls blau gewinnt,} \\ 6E_\mathrm{g} &= V_0 \quad \text{falls gelb gewinnt,} \end{aligned}$$

also in jedem Fall das Anfangskapital V_0.

Das Glücksrad als Goldesel?

Frage: Gibt es eine risikolose Gewinnmöglichkeit?

In der Fachsprache: Bietet das Glücksrad Arbitrage?

Ausprobieren!

Exkurs: Ein Beweis, dass das Glücksrad kein Goldesel ist

Jede Gewinnmöglichkeit muss mindestens die Summe $E_\mathrm{r} + E_\mathrm{b} + E_\mathrm{g}$ aller Einsätze liefern, also

$$2E_\mathrm{r} \overset{(\mathrm{r})}{\geq} E_\mathrm{b} + E_\mathrm{g}, \quad E_\mathrm{b} \overset{(\mathrm{b})}{\geq} E_\mathrm{r} + E_\mathrm{g}, \quad 5E_\mathrm{g} \overset{(\mathrm{g})}{\geq} E_\mathrm{r} + E_\mathrm{b}.$$

Aus (r) und (b) folgt $2E_\mathrm{r} \geq E_\mathrm{r} + 2E_\mathrm{g}$, also $E_\mathrm{r} \geq 2E_\mathrm{g}$.
Aus (g) und (b) folgt $5E_\mathrm{g} \geq 2E_\mathrm{r} + E_\mathrm{g}$, also $2E_\mathrm{g} \geq E_\mathrm{r}$.
Zusammen ergibt dies $E_\mathrm{r} = 2E_\mathrm{g}$.
Einsetzen in (r) gibt $3E_\mathrm{g} \geq E_\mathrm{b}$, in (b) gibt $E_\mathrm{b} \geq 3E_\mathrm{g}$.
Zusammen ergibt dies $E_\mathrm{b} = 3E_\mathrm{g}$.
Also gilt in (r), (b), (g) Gleichheit $\Longrightarrow$ kein Gewinn.

5. Strategie: Konstante Einsätze am Glücksrad

Wähle Bruchteil $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ und setze den konstanten Einsatz $E_{\mathsf{r}} = V_0/k$ auf rot solange es geht.

Bis zum Ruin können so mindestens k Einsätze verspielt werden.

Ausprobieren! (Zum Beispiel mit $k = 3$)

5. Strategie: Konstante Einsätze am Glücksrad

Wähle Bruchteil $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ und setze den konstanten Einsatz $E_{\mathsf{r}} = V_0/k$ auf rot solange es geht.

Bis zum Ruin können so mindestens k Einsätze verspielt werden.

Empirische Beobachtung:

- Kleiner Einsatz $\Longrightarrow$ Kleines Vermögenswachstum, aber auch kleine Ruinwahrscheinlichkeit
- Großer Einsatz $\Longrightarrow$ Stärkeres Vermögenswachstum, aber auch große Ruinwahrscheinlichkeit

Frage:
Können die Ruinwahrscheinlichkeiten berechnet werden?

5. Strategie: Analyse der Ruinwahrscheinlichkeit

Sei q_k die Wahrscheinlichkeit des Ruins falls $V_0 = kE_\mathsf{r}$.

Man kann zeigen, dass gilt

$$q_k = \lambda^k \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.61803\ldots$$

Gute Mathematikstudenten sollten dies nach einem Jahr Studium herleiten können.

5. Strategie: Tabelle der Ruinwahrscheinlichkeiten

k	q_k	k	q_k
0	1	10	0.008131
1	0.61803	15	0.000733
2	0.38197	20	0.000066
3	0.23607	25	5.96×10^{-6}
4	0.14590	30	5.37×10^{-7}
5	0.09017	40	4.37×10^{-9}
6	0.05573	50	3.55×10^{-11}
7	0.03444	100	1.26×10^{-21}
8	0.02129	300	2.01×10^{-63}
9	0.01316	1000	1.03×10^{-209}

6. Strategie: Setzen konstanter Bruchteile

Beobachtung: Konstante Einsätze geben nach Vermögenszuwachs nur noch kleine Rendite.

Idee: Riskiere höhere Einsätze bei großem Vermögen, setze z. B. immer konstante Bruchteile $\alpha_\mathsf{r}, \alpha_\mathsf{b}, \alpha_\mathsf{g} \geq 0$ auf rot, blau und gelb, wobei $\alpha_\mathsf{r} + \alpha_\mathsf{b} + \alpha_\mathsf{g} \leq 1$.

Vorteil: Ist das Gesamtvermögen nicht auf ein oder zwei Farben konzentriert, kann es (abgesehen von Rundungseffekten) nie ganz verspielt werden!

6. Strategie: Setzen konstanter Bruchteile (Forts.)

Frage: Welche Bruchteile α_{r}, α_{b}, α_{g} sind optimal?

Komplizierte Antwort: Dies hängt von erwarteten subjektiven Nutzen des Wachstumsfaktors F ab, wobei dies mit einer Nutzenfunktion $U : [0, \infty) \to [-\infty, \infty)$ gemessen wird ...

Wir probieren es einfach aus:

- Feste Prozentsätze,
- Potenz 0.0 für Potenznutzen,
- Einsätze so, dass der zugehörige logarithmische Nutzen am Glücksrad möglichst groß wird.

6. Strategie: Logarithmische Nutzenfunktion

Lösung: Optimaler Mindesteinsatz ist $\frac{1}{3}$ des Vermögens in der Aufteilung

$$\alpha_{\mathsf{r}} = \frac{5}{18} \approx 27.78\%, \quad \alpha_{\mathsf{b}} = 0, \quad \alpha_{\mathsf{g}} = \frac{1}{18} \approx 5.56\%.$$

Zusätzlich kann ein Anteil $\alpha \in [0, \frac{2}{3}]$ mit Aufteilung $(\frac{\alpha}{3}, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{6})$ gesetzt werden (vgl. Glücksrad als Tresor). Für $\alpha = \frac{2}{3}$ ist $\alpha_{\mathsf{r}} = \frac{1}{2}$, $\alpha_{\mathsf{b}} = \frac{1}{3}$, $\alpha_{\mathsf{g}} = \frac{1}{6}$ optimal.

Erwartete Rendite R im Optimum (linearer Nutzen):

$$\begin{aligned} R = {} & p_{\mathsf{r}}(2\alpha_{\mathsf{r}} - \alpha_{\mathsf{b}} - \alpha_{\mathsf{g}}) + p_{\mathsf{b}}(\alpha_{\mathsf{b}} - \alpha_{\mathsf{r}} - \alpha_{\mathsf{g}}) \\ & + p_{\mathsf{g}}(5\alpha_{\mathsf{g}} - \alpha_{\mathsf{r}} - \alpha_{\mathsf{b}}) = \frac{5}{36} \approx 13.889\% \end{aligned}$$

Entwickle Deine clevere Strategie

- Entscheide Dich für eine Nutzenfunktion
  (zum Beispiel logarithmischer Nutzen, Potenznutzen, exponentieller Nutzen) oder denke Dir eine eigene aus.
- Bestimme Deine optimale Investitionsstrategie
- Probieren diese online aus!

Internet:
`http://www.fam.tuwien.ac.at/public/simulation/wheel_de.html`

Computerprogramme zum Ausprobieren

- Investieren am Glücksrad
- Investieren am Aktienmarkt
- Berechnung der Lebenserwartung
- Altersvorsorge mit Privatpension
- Zeitliche Entwicklung der Privatrenten

Internet:
`http://www.fam.tuwien.ac.at/public/simulation/`

Poster im Internet

- Prinzip der Versicherung
- Extremwerttheorie – Die Mathematik der seltenen Ereignisse
- Zukünftige Lebenserwartung & Rentenversicherung
- Kreditrisiko – Grundlagen und aktuelle Entwicklungen
- Finanzmathematik – Aktien, Zinsen und Optionen
- Volkszählungen & aktuelle Sterbetafeln
- Rückversicherung und Katastrophenbonds
- Die größten Versicherungsschäden
- Zinsstrukturmodelle – Finanzmathematik und Geometrie

`http://www.fam.tuwien.ac.at/public/posters/`