Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik

Investment unter Unsicherheit

Petra Halász

1026532

WS 2012

Inhaltsverzeichnis

1 Suchverhalten

Die Modellierung von Suchverhalten ist ein wichtiges Gebiet der Finanzmathematik, bei dem die probabilistische Modellierung eine wichtige Rolle spielt. Ziel der Einführung der Unsicherheit in Suchmodelle ist es, den besten Zeitpunkt zu finden, bei dem der Sucher möglichst viel Information hat, um seine Entscheidung so treffen zu können, dass er einen maximalen Nutzen daraus ziehen kann.

1.1 Das elementare Suchmodell

Um die Eigenschaften des Suchverhaltens analysieren zu können, definiert man zuerst ein elementares Suchmodell. Später wird dieses Modell auf den Einfluss bestimmter Änderungen untersucht.

Um das Modell möglichst einfach halten zu können, geht man dabei vom Beispiel einer Person aus, die einen Job sucht.

Die Person bekommt zwar jeden Tag genau einen Jobangebot, dessen Wert dem abgezinsten, bis zum Lebensende verdienten Betrag vom Job entspricht, die Anzahl der Jobangebote insgesamt soll aber nicht begrenzt werden. Die Kosten eines Jobangebotes, also Kosten, die direkt in Verbindung mit einem Jobangebot gesetzt werden können, werden mit einer Konstante c angesetzt. Beispiele für solche Kosten sind etwa Transport- oder Werbekosten. Bezüglich der Handhabung der Jobangebote aus vorhergehenden Perioden kann man zwischen zwei Methoden unterscheiden. Bei der Methode *mit recall* dürfen Jobs aus früheren Perioden angenommen werden, während bei der Methode *ohne recall* Jobangebote in der betreffenden Periode entweder angenommen oder abgelehnt werden müssen. Der Schwellenlohn ist der Betrag, unter dem der Sucher nicht bereit ist für ein Gehalt unter diesem Betrag zu arbeiten. Man bezeichne die Wahrscheinlichkeit, dass der Sucher einen Jobangebot von mindestens w bekommt mit $F(w)$. Diese Verteilungsfunktion ist unabhängig von allen vorhergehenden Angebote und vom Zeitpunkt, das heißt sie ist invariant bezüglich der Zeit. Weiters nimmt man an, dass der Sucher diese Verteilungsfunktion kennt. Ziel des Suchers ist, sich zu entscheiden wann beziehungsweise bei welchem Jobangebot er stoppt und ein Angebot annimmt.

Näher untersucht wird das Modell mit recall.

Wie man leicht erkennt, ist das Nutzen nach den ersten n Perioden durch $Y_n := max(X_1, \ldots, X_n)$ gegeben. Ziel ist eine Stoppzeit N so zu finden, dass $\mathbb{E}[Y_N]$ maximal wird. Sei dazu g_y der erwartete Nutzen der Suche mit Schwellenlohn y. Mit N_y bezeichnet man die Anzahl der betrachteten Jobangebote, bis ein akzeptables Angebot gefunden wird. N_y ist eine Zufallsvariable mit geometrischer Verteilung mit Parameter $p = 1 - F(y)$ und $\mathbb{E}[N_y] = \frac{1}{p}$. Damit gilt mit der Annahme $1 - F(y) > 0$

$$g_y = \frac{-c + \int_y^\infty x dF(x)}{1 - F(y)} \tag{1}$$

da N_y die Anzahl der Beobachtungen ist, bis ein Angebot größer oder gleich y gefunden wird und der zweite Term auf der rechten Seite der bedingte Erwartungswert des Vorkommens eines Angebotes von mindestens y ist. Umformung liefert:

$$c = \int_y^\infty (x - g_y) dF(x) \tag{2}$$

Man erkennt, dass ξ genau dann der optimale Schwellenlohn ist, falls $g_\xi = \xi$ gilt und somit ergibt sich:

$$c = \int_\xi^\infty (x - \xi) dF(x) \tag{3}$$

Weiters ist g unimodal, das heißt, g hat genau einen Maximum. Man definiert H durch

$$H(x) := \int_x^t (t - x) dF(t). \tag{4}$$

H ist eine konvexe, nicht-negative und streng monoton fallende Funktion, die bei Null $\mathbb{E}[X_1]$ und bei unendlich 0 annimmt. Somit gilt, dass ξ sogar eine eindeutige Lösung von $H(x) = c$ ist.

Bei einem alternativen Zugang nimmt man an, dass ξ das eindeutige Gehalt ist, bei dem dem Sucher gleichgültig ist, ob er ξ annimmt, oder mit der Suche fortfährt. Falls er fortfährt, wird es optimal sein, beim nächsten Durchlauf zu stoppen, da dort der Wert des Jobangebotes mindestens ξ betragen wird. Daher sollte ξ folgende Gleichung erfüllen:

$$\xi = \mathbb{E} \max\{\xi, X_1\} - c. \tag{5}$$

Dabei ist die linke Seite der Nutzen bei Annahme von ξ und die rechte Seite der erwartete Nutzen vom Betrachten eines weiteren Jobangebotes.

1.2 Einfluss von Änderungen der Ungewissheit

Es ist klar, dass wenn c verkleinert wird, sich ξ und die Suchzeit erhöhen. Wie wirkt sich aber eine Änderung der Ungewissheit auf die Suche aus?

1.2.1 Änderung der Verteilung $F(w)$

Seien X,$Z \geq 0$ Zufallsvariablen mit $X \sim F$ und $Z \sim G$, wobei $F \succ_2 G$ gilt. Um Vergleichbarkeit zu gewähren, seien X und Z so, dass $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Z]$ gilt. Mit H_F und H_G bezeichne man die Funktionen für F und G, die wie die H Funktion in 4 definiert ist. Seien ξ_F und ξ_G die Schwellenlöhne bezüglich F und G. Sei u_y eine Nutzenfunktion definiert als

$$\begin{aligned} u_y(x) &= 0, && x \leq y, \\ u_y(x) &= x - y, && x \geq y. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Definition von H liefert

$$H_G(y) = \mathbb{E}[u_y(Z)] \geq \mathbb{E}[u_y(H)] = H_F(y), \text{ für alle } y \geq 0, \tag{7}$$

also $H_G(y) \geq H_F(y)$.
Aufgrund von 3 und 7 gilt:

$$H_F(\xi_F) = c = H_G(\xi_G) \geq H_F(\xi_G) \tag{8}$$

und damit gilt

$$\xi_F \leq \xi_G, \tag{9}$$

da H_F monoton fallend ist. Das heißt, dass die Erhöhung der Unsicherheit in der Verteilungsfunktion der Jobangebote für den Sucher vorteilhaft ist.

1.2.2 Anzahl der Jobangebote pro Periode variabel

Sei N_i die Anzahl der Jobangebote am i-ten Tag (oder Periode), eine nicht-negative, ganzzahlige Zufallsvariable, wobei die N_i's unabhängig voneinander sind und identisch Verteilt sind. Um Vergleichbarkeit mit dem Standardmodell ($\mathbb{P}(N_i = 1) = 1$) gewährleisten zu können, nehmen wir an, dass $\mathbb{E}[N_i] = 1$ gilt, somit bleiben die erwarteten Kosten pro Periode c.
Der Sucher darf alle N_i Angebote betrachten, bevor er eine Entscheidung trifft. Falls er ein Angebot annimmt, wird es klarerweise das Beste aus den N_i Angeboten sein. Somit

ist die Verteilung des besten Angebotes gegeben durch:

$$G(t) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i[F(t)]^i \text{ wobei } p_i = \mathbb{P}(N_1 = 1) \tag{10}$$

Unter der Annahme, dass $u(Z)$ definiert ist, folgt aus der Jensen'scher Ungleichung $\mathbb{E}[u(Z)] \geq u(\mathbb{E}[Z])$ für alle Zufallsvariablen Z und konvexe Funktionen u. Eine Anwendung der Jensen'schen Ungleichung mit $u(i) = F(t)^i$ und Z mit Verteilung N_1 liefert:

$$G(t) \geq F(t) \text{ , für alle } t \geq 0 \tag{11}$$

Daher gilt, dass die Verteilung G stochastisch kleiner ist als F, und daraus folgt $H_G \leq H_F$ und somit $\xi_G \leq \xi_F$. Das heißt, für den Sucher ist es vorteilhafter jeden Tag genau ein Jobangebot zu bekommen, als eine zufällige Anzahl an Jobangeboten mit dem Mittel 1 pro Tag.

1.2.3 Martingale und die Existens eines Schwellenlohns

Seien $X_1, X_2, \ldots$ eine beliebige Folge von Zufallsvariablen und für jedes n sei Y_n eine Zufallsvariable, dessen Wert durch $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bestimmt ist. Die Folge $Y_1, Y_2, \ldots$ ist ein *Supermartingal* bezüglich der Folge $X_1, X_2, \ldots$ falls für alle n $\mathbb{E}[Y_n]$ mit Wahrscheinlichkeit 1 existiert und

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | X_1, \ldots, X_2] \leq Y_n \tag{12}$$

gilt. Falls zusätzlich

$$\mathbb{E}[Y_N] \leq \mathbb{E}[Y_1] \tag{13}$$

für jede Stoppzeit N, für die $\mathbb{E}[Y_N]$ existiert, gilt, dann bezeichnet man den Supermartingal als *regulär*. Auf das Jobsuchemodell angewendet, bezeichnet man X_i als i-tes Jobangebot, und $Y_i = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_i\} - ic$. Ziel ist eine Stoppzeit N zu finden, die $\mathbb{E}[Y_n]$ maximiert. Man kann zeigen, dass zwischen den Stoppzeiten, die mit Wahrscheinlichkeit 1 wirklich stoppen, eine optimale Stoppzeit existiert, solange folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

$$\lim_{n \to \infty} Y_n = -\infty \text{ mit Wahrscheinlichkeit 1} \tag{14}$$

und

$$\mathbb{E}[|Z|] < \infty, \tag{15}$$

wobei $Z \equiv \sup_n Y_n$. Eine mögliche Interpretation für diese Gleichung ist, wenn man Z mit dem Wert des angenommenen Jobs gleichsetzt und man einen Blick in die Zukunft hätte.

Unter der Annahme $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ gilt wegen des Lemma von Borel-Cantelli, dass 14 und 15 erfüllt sind und somit eine optimale Stoppzeit für das Jobsuchmodell existiert. Weiters impliziert diese Annahme

$$\mathbb{E}[Y_n^2] \leq M < \infty, \text{ für alle n.} \tag{16}$$

Somit ist die Folge $Y_1, Y_2, \ldots$ gleichgradig integrierbar. Es gilt weiters, dass ein gleichgradig integrierbarer Supermartingal regulär ist. Aus diesen Ergebnissen folgt folgendes wichtiges Ergebnis: Betrachte man ein 'stopping problem' bei dem ein optimaler Stoppzeit existiert. Man nehme an, dass für jede Menge von beobachteten Werten $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$, die

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|x_1, \ldots, x_n] \leq y_n, \tag{17}$$

erfüllen, $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots$ ein regulärer Supermartingal bezüglich der Folge $X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots$ ist. Dann existiert eine optimale Stoppzeit, die genau dann stoppt, wenn 17 erfüllt ist.

Um diesen Satz auf das Jobsuchemodell anwenden zu können, muss gezeigt werden, dass die Voraussetzungen erfüllt werden. Unter der Annahme $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$ bleibt nur zu zeigen, dass $Y_{n+1}, Y_{n+2}, \ldots$ ein Supermatingal ist, falls 17 erfüllt wird. Um dies zu zeigen, definiert man ξ als die eindeutige Lösung von $H(y) - c = 0$, so dass, $y \geq \xi \Rightarrow (y) - c \leq 0$ gilt.

Angenommen 17 gilt für $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$, und $Z_n := Y_n + nc = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{n+1}|X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] &= -(n+1)c + \int_0^\infty \max[z_n, x] dF(x) \\ &= -(n+1)c + z_n + H(z_n) \\ &= -nc - c + z_n + H(z_n) \\ &= y_n + [H(z_n)c] \end{aligned} \tag{18}$$

und somit gilt $H(z_n) - c \leq 0$, da 17 gilt. Da H eine streng monoton fallende Funktion ist und Z_n mit wachsenden n steigt, gilt die gesuchte Ungleichung 12. Weiters gilt 12 wegen 13 genau dann, wenn $z_n \geq \xi$.

1.3 Veränderungen des Standardmodells

1.3.1 Suche in einer dynamischen Wirtschaft

Sei $\{1,2,\dots,K\}$ mit $K \leq +\infty$ die Menge der möglichen Wirtschaftslagen. Sei F_i die jeweils dazugehörige Verteilungsfunktion des Gehaltes. Die Zustandswechsel in der Wirtschaft sollen durch eine Markovkette mit Übergangsmatrix $P = (P_{ij})$ modelliert werden. Das verfügbare Jobangebot ist abhängig vom zufälligen Zustand in dem sich die Wirtschaft befindet (da der Zustand die Verteilungsfunktion des Gehaltes bestimmt). Falls der Sucher das Angebot x annimmt, hört der Prozess auf und der Sucher ist im Zustand absorbiert. Lehnt er das Angebot x ab, so muss er c Einheiten Geld zahlen und wechselt den Zustand, wobei der Wechsel über (P_{ij}) erfolgt (der Sucher bekommt somit ein neues Angebot y, das von einer vom neuen Zustand abhängigen Verteilungsfunktion bestimmt wird). Der Sucher darf Angebote aus vorhergehenden Perioden nicht annehmen. Ziel des Suchers ist eine Stoppzeit zu finden, bei der die erwarteten β-diskontierten Nettoeinkommen maximiert werden.

Sei $V_n(i,x)$ der maximale β-diskonierte erwartete Wert, der erreichbar ist, falls n Perioden verbleiben, die Wirtschaft sich in der Lage i befindet und das aktuelle Jobangebot x ist. Dann erfüllt $V_n(i,x)$ die Rekursionsgleichung ($V_0 \equiv 0$):

$$\begin{aligned} V_n + 1(i,x) &= \max\{x, -c + \beta \sum_{j=1}^{K} P_{ij} \int_0^\infty V_n(j,y) dF_i(y)\} \\ &\equiv \max\{x, R_n(i)\}. \end{aligned} \tag{19}$$

$R_n(i)$ ist dabei der Schwellenlohn falls n+1 Perioden verbleiben und die Wirtschaft sich in Zustand i befindet. Weiters kann man zeigen, dass diese Schwellenlöhne folgende Bedingungen erfüllen:

$$R_n(1) \leq R_n(2) \leq \cdots \leq R_n(K), \tag{20}$$

und

$$R_{n+1}(i) \geq R_n(i). \tag{21}$$

Um 20 und 21 zu gewährleisten, muss man lediglich die Verteilungsfunktionen so anordnen, dass die mit größeren Nummern vorteilhafter sind, d.h.:

$$F_1(t) \geq F_2(t) \geq \cdots \geq F_K(t), \text{ für alle } t \geq 0, \tag{22}$$

und

$$\sum_{j=k}^{K} P_{ij} \text{ ist nicht fallend in i für jedes fixe k} \tag{23}$$

1.3.2 Adaptives Suchen

Die Annahme, dass die Verteilungsfunktion F zur Gänze bekannt ist, ist sehr unrealistisch. Deswegen nimmt man an, dass F bis auf den Parameter θ bekannt ist. Die Verteilung von θ soll ebenfalls bekannt sein.

Falls der Sucher risikoavers ist, kann die Tatsache, dass F nicht vollständig bekannt ist, drastische Auswirkungen auf die optimale Strategie haben. Zum Beispiel mach diese Änderung möglich, dass sogar bei der Methode ohne recall kein Schwellenlohn existiert.

Falls recall nicht erlaubt ist, kann die Existenz vom Schwellenlohn unter Annahmen, die verlangen, dass höhere Angebote ein minimales Steigen der erwarteten Angebote in der Zukunft bewirken, gezeigt werden. Ein Beispiel dafür ist, falls F und θ beide normalverteilt sind.

2 Optimaler Konsum unter Ungewissheit

Eine Entscheidung, die jeden Wirtschaftsvertreter betrifft ist, wie viele Güter täglich konsumiert werden sollen. Diese Entscheidung muss fortlaufend und unter Ungewissheit getroffen werden.

Verschiedene Ökonomen entwickelten verschiedene Ansätze:

Laut Marshall(1920) steigt sofortiger Konsum als Hedge gegen die unsichere Zukunft.

Laut Boulding(1966) erhöht die Verminderung von sofortigem Konsum die zukünftige Beabsichtigen von Konsum.

Phelps(1962) entwickelte ein optimales Vorgehen für das Zuordnen des Startkapitals und des Einkommens auf täglichen Konsum und auf einen einzigen risikoreichen Asset. Das Verfahren maximiert den erwarteten Nutzen des lebenslangen Konsums. Phelps zeigte, dass für einige Nutzenfunktionen die optimale Höhe von sofortigem Konsum absteigt, falls Unsicherheit (bezüglich der Zinsen beim Sparen) eingeführt wird, bei einigen umgekehrt.

2.1 Zweiperiodenmodelle

2.1.1 Zweiperiodenmodell mit Unsicherheit im Einkommen in der zweiten Periode

Sei w das Startkapital, das dem Konsument in der ersten Periode zur Verfügung steht. Er bestimmt eine Summe c, die er in der ersten Periode konsumiert, somit ist sein Ersparnis bzw. Investition genau $w - c$. Sein Vermögen in der zweiten Periode, die er zur Gänze konsumiert, besteht aus einem zufälligen Einkommen Y gemeinsam mit $r(w - c)$, also dem Wert seiner aufgezinsten Investion. Ziel des Konsumenten ist c so zu wählen, dass der erwartete Wert $V(w)$ der Zweiperiodennutzenfunktion maximiert wird. Mit c^* bezeichne man die optimale Konsumhöhe.

$$V(w) \equiv \max_{0 \leq c \leq w} \mathbb{E}[U(c,Y + r(w - c))] \tag{24}$$

Man nehme an, dass die Nutzenfunktion U in jedem Parameter konkav steigend ist, das heißt $U_i = \frac{\delta U(c_1,c_2)}{\delta c_i} > 0$ und $\frac{\delta^2 U(c_1,c_2)}{\delta c_i^2} < 0, i = 1,2$. Um Extremstellen zu finden, leitet man die Nutzenfunktion ab und erhält somit folgende notwendige Bedingung:

$$\mathbb{E}U_1 = r\mathbb{E}U_2 \tag{25}$$

Falls $Y = \mathbb{E}Y$, dann vereinfacht sich 25 zu

$$U_1 = rU_2 \tag{26}$$

Sei c_d die optimale Konsumhöhe, die 26 löst. Entwickelt man $\mathbb{E}U_1$ und $\mathbb{E}U_2$ in eine Taylorreihe um $< c_d, \mathbb{E}[Y] + r(w - c_d) >$ und vernachlässigt die Terme der Form $\frac{\delta^k U_i}{\delta^k c_2} \frac{\mathbb{E}[Y - \mathbb{E}[Y]]^k}{k!}$ für $k > 2$, erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}U_1 - r\mathbb{E}U_2 &= U_1 + \tfrac{U_{122}\sigma^2}{2} - r[U_2 + \tfrac{U_{222}\sigma^2}{2}] \\ &= \tfrac{\sigma^2}{2}[U_{122} - rU_{222}] \\ &= \tfrac{\sigma^2}{2}[U_{122} - \tfrac{U_1}{U_2}U_{222}] \equiv \tfrac{\sigma^2}{2}\mathfrak{U} \end{aligned} \tag{27}$$

Unter den Annahmen $0 < c_d < w$ und $(\frac{d^2}{dc2})U|_{c_d} < 0$ gilt:

$$\frac{d}{dc}\mathbb{E}U_1 - r\mathbb{E}U_2|_{c_d} = \frac{d^2}{dc^2}\mathbb{E}U|_{c_d} < 0, \tag{28}$$

da $\frac{d^2}{dc^2}\mathbb{E}U|_{c_d} = \frac{d^2}{dc^2}U|_{c_d} + \mathcal{O}(\sigma^2)$. Falls 27 negativ ist, gilt $c^* < c_d$ falls Y wenig risikoreich ist. Falls U eine fallende absolute risikoaversion besitzt, dann gilt $U_{iii} > 0$, weiters, falls U additiv ist sind die Querableitungen Null, das $\mathfrak{U} < 0$ liefert.

Diese Ergebnisse nutzend zeigte Sandmo (1970), dass falls das Einkommen in Periode zwei $\alpha Y + (1-\alpha)\mathbb{E}[Y]$,$0 \leq \alpha \leq k$, wobei $-\frac{\mathbb{E}[Y](1-k)}{k}$ die minimale Höhe vom Einkommen in Periode zwei ist, ist, dann ist c_α, die optimale Höhe von Konsum, eine fallende Funktion von α, falls U additiv ist und eine fallende absolute risikoaversion besitzt.

2.1.2 Zweiperiodenmodell mit reinem Kapitalrisiko

In diesem Modell bekommt der Konsument kein Einkommen in der zweiten Periode, sondern investiert die Differenz zwischen seinem Anfangsvermögen und Konsum in der ersten Periode. Die Kapitalverzinsung $X - 1$ auf seinem Investment/Ersparnis ist zufällig und somit ist das Vermögen, das in der zweiten Periode zur Verfügung steht, genau $(w - c)X$. Man nehme an, dass die Zweiperiodennutzenfunktion additiv ist. Ziel des Konsumenten ist die optimale Höhe des Konsums c_X so zu finden, dass sie den Nutzen maximiert, das heißt

$$\max_{0 \leq c \leq w} \{u(c) + \mathbb{E}v[X(w - c)]\}, \tag{29}$$

wobei u und v die strikt konkaven Nutzenfunktionen für Konsum in Periode 1 beziehungsweise Periode 2 sind. Analog wie beim Modell mit reinem Einkommensrisiko, erhält man eine notwendige Bedingung durch Ableiten und Nullsetzen:

$$u'(c) = \mathbb{E}\{Xv'[X(w-c)]\}. \tag{30}$$

Im Gegensatz zum Modell mit reinem Einkommensrisiko, können bei diesem Modell solche Bedingungen an v gestellt werden, dass eine Erhöhung des Risikos von X zu eine Verringerung von c_x, der optimalen Höhe von Konsum in Periode 1, führt, ohne Beschränkungen für das Risikoreiche von X angeben zu müssen.

Satz 1. *Sei X risikoreicher als Z und $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Z]$. Dann ist $c_X \leq c_Z$, falls f konvex ist und $c_X \geq c_Z$ falls f konkav ist, wobei $f(t) = tv'(t)$ für $t \geq 0$.*

Beweis. Sei f zuerst konvex. Da $c \leq w$ gilt, ist $w - c \geq 0$ und somit $X(w-c)$ risikoreicher als $Z(w-c)$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{Xv'(X(w-c))\} &= \tfrac{1}{w-c}\mathbb{E}[f(X(w-c))] \\ &\geq \tfrac{1}{w-c}\mathbb{E}[f(Z(w-c))] \\ &= \mathbb{E}\{Zv'(Z(w-c))\}, \end{aligned} \tag{31}$$

wobei die zwei Gleichungen aus der Definition von f und die Ungleichung von $Z \succ_2 X$ und dem Konvexität von f folgen. Sei v' eine fallende Funktion ($v'' < 0$), somit gilt für $c_X > c_Z$ mit 30 und 31:

$$\begin{aligned} u'(c_X) &= \mathbb{E}\{Xv'(X(w-c_x))\} \\ &\geq \mathbb{E}\{Zv'(Z(w-c_X))\} \\ &> \mathbb{E}\{Zv'(Z(w-c_Z))\} \\ &= u'(c_Z). \end{aligned} \tag{32}$$

Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass u konkav ist. Somit muss $c_x \leq c_Z$ gelten, wie gewünscht. Für den Fall, dass f konkav ist, kann analog argumentiert werden. □

Eine Auswirkung dieses Satzes ist, dass die Ungewissheit in der Kapitalverzinsung, im Gegensatz zu einem bekannten Zinssatz, zu einer Verminderung des Konsums in Periode 1 führt, falls f konvex ist.

Sowohl beim Modell mit reinem Einkommensrisiko, als auch beim Modell mit reinem Kapitalrisiko spielt die dritte Ableitung der Nutzenfunktion eine entscheidende Rolle. Wegen $f''(c) = 2v''(v) + cv'''(c)$ ist es klar, dass eine notwendige Bedingung für die Konvexität von f ist, dass die dritte Ableitung von v positiv ist. *Isoelastische Funktionen*, also Funktionen mit konstanter Risikoaversion ($v(c) = \frac{c^\gamma}{\gamma}$), haben für $\gamma < 1$ und $\gamma \neq 0$

alle positiven dritten Ableitungen. f ist für $\gamma < 0$ konvex und für $\gamma > 0$ konkav, da $f''(c) = \gamma(\gamma-1)c^{\gamma-2}$. Weiters gilt $0 < \frac{dc_X}{d_W} < 1$.

2.2 Mehrperiodenmodell

Bei Mehrperiodenmodellen werden drei verschiedene Typen betrachtet: Mehrperiodenmodelle mit reinem Einkommens- bzw. Kapitalrisiko und Mehrperiodenmodelle mit Unsicherheit in der Lebensdauer.

2.2.1 Mehrperiodenmodell mit reinem Kapitalrisiko

Für Mehrperiodenmodelle muss man etwas strengere Bedingungen setzen um die gewünschten Aussagen treffen zu können. Sei U eine mehrperiodische Nutzenfunktion des Konsumflusses $\mathbf{c} =< c_i >_{i=1}^{\infty}$. Man nehme an, dass U additiv und der Form

$$U(\mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{i-1} u(c_i) \tag{33}$$

ist, wobei $0 < \beta < 1$ den Diskontierungsfaktor und u die konkave Einperiodennutzenfunktion bezeichnen.

Falls neben 33 und der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen die Einperiodennutzenfunktionen eine konstante relative Risikoaversion haben, das heißt

$$\begin{aligned} u(c) &= \tfrac{c^\gamma}{\gamma}, \quad && \gamma \neq 0, \gamma < 1, \\ &= \ln(c), && \gamma = 0 \end{aligned} , \tag{34}$$

dann sind laut Mirman (1971) das Zweiperiodenmodell mit reinem Kapitalrisiko und das Mehrperiodenmodell mit reinem Kapitalrisiko äquivalent. Wie vorher, bewirkt eine Steigung des Risikos eine Verminderung des Konsums für $\gamma < 0$ und eine Steigung des Konsums für $\gamma > 0$.

2.2.2 Mehrperiodenmodell mit reinem Einkommensrisiko

Beim Mehrperiodenmodell mit reinem Einkommensrisiko betrachtet Miller (1976) eine breitere Klasse von Einperiodennutzenfunktionen als die in 34 beschriebenen. Man betrachte ab jetzt Einperiodennutzenfunktionen u aus $\mathfrak{F}$, wobei

$$\mathfrak{F} := \{u : u' > 0 \text{ und } u' \text{ konvex}\}. \tag{35}$$

Daher gilt für alle $u \in \mathfrak{F} : u''' > 0$.

Sei $Y_j > 0$ das Einkommen am Ende der Periode j, Y_j seien unabhängig. Man nehme an, dass die Y_j identisch verteilt sind und Ausborgen nicht erlaubt ist. Somit muss $0 \leq c \leq w$ gelten. Sei $r - 1$ der Zinssatz mit dem sich die Investition verzinst, womit das Vermögen der jeweils nächste Periode geschrieben werden kann als $Y + r(w - c)$. Um gewährleisten zu können, dass der Nutzen vom optimalen Konsumfluss begrenzt bleibt, nehme man $r^{\gamma}\beta < 1$ an. Sei

$$Av(w) := \sup_{0 \leq c \leq w} \{u(c) + \beta \mathbb{E} v[Y + r(w - c)]\},\ w > 0,\ v \in \mathcal{V}, \tag{36}$$

wobei $\mathcal{V}$ der Banachraum der stetigen, steigenden konkaven Funktionen auf $(0,\infty)$, die

$$||v|| \equiv \sup_{w>0} \frac{|v(w)|}{max(|u(w)|,1)} < \infty \tag{37}$$

erfüllen, ist. Da A eine Kontraktion auf $\mathcal{V}$ ist, hat A einen eindeutigen Fixpunkt in $\mathcal{V}$, so, dass der Nutzen vom verfolgen des optimalen Konsumflusses mit Anfangsvermögen w geschrieben werden kann als:

$$V(w) = \sup_{0 \leq c \leq w} \{u(c) + \beta \mathbb{E} V(Y + r(w - c))\},\ w > 0. \tag{38}$$

$c_Y(w)$ ist die optimale Höhe von Konsum, wenn das Vermögen w ist und Y das zufällige Einkommen ist und ist gleich dem c aus 38, bei dem der Ausdruck sein Maximum annimmt. Weiters, da V der Fixpunkt von A ist, gilt, dass V konkav ist. Man kann zeigen, dass $c_Y(w)$ und $w - c_Y(w)$ steigende Funktionen von w sind, und somit $0 < \frac{dc_Y(w)}{dw} < 1$ gilt. Weiters kann man zeigen, dass ein risikoreicheres Einkommen Z weniger wünschenswert ist als Y, also, dass $V_Z(w) \leq V_Y(w)$ für alle w gilt. Die Tatsache, dass Z risikoreicher ist als Y, impliziert

$$u(c) + \beta \mathbb{E} V_Y(Z + r(w - c)) \leq u(c) + \beta \mathbb{E} V_Y(Y + r(w - c)), \tag{39}$$

für alle $0 \leq c \leq w$, da V_Y eine konkave, wachsende Funktion ist. Maximiert man die linke Seite von 39, erhält man

$$A_Z V_Y(w) \leq u(c_Z(w)) + \beta \mathbb{E} V_Y(Y + r(w - c_Z(w))) \leq V_Y(w)$$

also

$$A_Z V_Y \leq V_Y \tag{40}$$

Da A_Z monoton ist, kann 40 öfters angewendet werden und man erhält somit:

$$A_Z^{n+1} V_Y \leq A_Z^n V_Y \leq \cdots \leq V_Y. \tag{41}$$

Die Tatsache, dass A_Z eine Kontraktion ist impliziert, dass der Fixpunkt gegeben ist durch:

$$\lim_{n\to\infty} A_Z^n v = V_Z \ \forall v \in \mathcal{V} \tag{42}$$

$v = V_Y$ gemeinsam mit 40 liefert:

$$V_Z = \lim_{n\to\infty} A_Z^n V_Y \leq V_Y,$$

wie gewünscht. Miller (1976) zeigte weiters, dass aus $u \in \mathfrak{F}$ $V \in \mathfrak{F}$ folgt und zeigt damit, dass immer $c_Z(w) \leq c_Y(w)$ gilt, falls Z risikoreicher ist als Y.

2.2.3 Mehrperiodenmodell mit Unsicherheit in der Lebensdauer

In diesem Modell ist die Quelle der Unsicherheit die unbekannte Restlebensdauer der Person. Sei p_i die Wahrscheinlichkeit, dass der Konsument genau i Jahre lebt, wobei $i = 1,\ldots,n$ eine endliche, ganze Zahl ist, die kleiner oder gleich dem Höchstlebensdauer n ist. Somit kann man die Wahrscheinlichkeit, dass die Person mindestens i Jahre lebt folgendermaßen darstellen:

$$P_i = \sum_{j=1}^{n} p_j. \tag{43}$$

Die Konsumentscheidungen werden in diesem Modell am Anfang der Periode getroffen, bevor sich herausstellt ob die Person überlebt. Um das Modell einfach halten zu können, nehmen wir an, dass kein Erbe und kein Einkommen existieren. Die Kapitalzinsen seien $r-1$. Mit $V_i(w)$ bezeichne man den maximalen erwarteten abgezinsten Wert des Nutzens des Konsums von Periode i bis Periode n. Somit gilt, falls das Vermögen in Periode i genau w ist folgende Gleichungen:

$$V_i(w) = \max_{0\leq c\leq w} \{P_i u(c) + \beta V_{i+1}(r(w-c))\},\ i = 0,1,\ldots,n-1 \tag{44}$$

und

$$V_n(w) = P_n u(w). \tag{45}$$

Man beschränkt sich wieder auf Einperiodennutzenfunktionen der Form von 34. Für den Fall $\gamma \neq 1$ kann man mittels Induktion zeigen, dass Konstanten K und f existieren, sodass

$$V_i(w) = u(w)K_i \tag{46}$$

und

$$c_i(w) = wf_i \tag{47}$$

gelten. Weiters gilt für f_i

$$f_i = \frac{P_i^{\frac{1}{1-y}}}{P_i^{\frac{1}{1-y}} + \alpha k} \tag{48}$$

wobei $\alpha = (\beta r^\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ und $k_i = (P_i f_i^\gamma + P_{i+1}\alpha^{1-\gamma}(1-f_i)^\gamma)^{\frac{1}{1-\gamma}} = K_i^{\frac{1}{1-\gamma}}$ gelten. Analog für den einfacheren Fall $\gamma = 1$ gelten

$$V_i(w) = \sum_{j=0}^{n-i} P_{i+j}\beta^j \ln w + K_i \tag{49}$$

und

$$c_i(w) = w\frac{P_i}{\sum\limits_{j=0}^{n-i} P_{i-j}\beta^j}. \tag{50}$$

Man betrachte zwei Personen mit zufälliger Restlebensdauer X bzw. Y. Seien $\mathbb{P}(X = i) = p_i$, $\mathbb{P}(Y = i) = q_i$,$P_i = \sum\limits_{j=i}^{n} p_j$ und $Q_i = \sum\limits_{j=i}^{n} q_j$. Wie wird der Konsum beeinflusst, falls Y risikoreicher ist als X?

Satz 2. *Seien $X \neq Y$ und Y risikoreicher als X, so, dass*

$$\sum_{i=0}^{j} P_i \geq \sum_{i=0}^{j} Q_i \ j = 0{,}1, \ldots ,n. \tag{51}$$

Dann gilt, dass die Person mit Lebensdauer Y in der Initialperiode strikt mehr konsumieren wird als die andere Person, egal ob X und Y im Erwartungswert gleich sind oder nicht.

Beweis. Seien $< \delta_i >_0^n$ und $< \beta_i >_0^n$ zwei Folgen, die

$$\Delta_i = \sum_{j=0}^{i} \delta_j \geq 0,\ i = 0{,}1, \ldots ,n\ (\Delta_{-1} = 0)$$

und

$$\beta_i \geq \beta_{i+1} \geq 0,\ \ i = 0{,}1, \ldots ,n-1$$

erfüllen. Gliedweises Summieren liefert

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \delta_i\beta_i &= \sum_{i=0}^{n}(\Delta_i - \Delta_{i-1})\beta_i \\ &= \sum_{i=0}^{n} \Delta_i\beta_i - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i\beta_{i+1} \\ &= \Delta_n\beta_n + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_i(\beta_i - \beta_{i+1}) \geq 0.\end{aligned}$$

Setzt man $\delta_i = P_i - Q_i$ und $\beta_i = \beta_{i-1}$, erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} P_i\beta^{i-1} \geq \sum_{Q_i}^{n} Q_i\beta^{i-1}. \tag{52}$$

Aus 50 und 52 folgt das Gewünschte. □

3 Brownsche Bewegung, Martingale und ihre wirtschaftliche Anwendungen

Unter Brownsche Bewegung versteht man die Bewegung von kleinen Teilchen in Flüssigkeiten und wurde vom schottischen Botaniker Robert Brown im Jahre 1827 entdeckt. Später bemerkte man, dass die Brownsche Bewegung auch für die Beschreibung des Verhaltens von vielen Merkmalen in der Wirtschaft geeignet ist. Eine der wichtigsten dieser Merkmale ist der Preis. Man bemerkte weiters, dass die Martingaleigenschaft der Brownschen Bewegung ein wesentlicher Bestandteil der Effizienzmarkthypothese ist. Die Brownische Bewegung spielt außerdem noch eine wichtige Rolle bei optimaler Kontrolle von (i) Lagerbestand, (ii) Instandhaltung der Ausrüstung, (iii) Vorrat und Bedarf von Barguthaben und (iv) der Analyse von Index Bonds.

3.1 Brownsche Bewegung

3.1.1 Grenzwertsatz für die Brownsche Bewegung

Beim Modell, das betrachtet wird, bewegt sich ein Teilchen genau Δx Einheiten nach links oder nach rechts, jeweils mit halber Wahrscheinlichkeit. Eine Bewegung wird nach allen Δt Zeitabständen durchgeführt. Für die Anwendung nehme man an, dass das betrachtete Teilchen einen Börsenwert oder das Vermögen einer Person darstellt. Seien $Y_1, Y_2, \ldots$ eine

Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit der Eigenschaft

$$\mathbb{P}(Y_i = \Delta x) = \mathbb{P}(Y_i = -\Delta x) = \frac{1}{2} \text{ für } i = 1{,}2,\ldots \tag{53}$$

Wie man leicht sieht, ist die Anzahl der Bewegungen in der Zeitspanne t genau $\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor$, weshalb man die Position des Teilchens folgendermaßen beschreiben kann

$$X(t) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{\lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor} \tag{54}$$

Als nächstes lässt man Δx und Δt nach Null gehen, und erhält somit eine Brownsche Bewegung mit $X(t) \to B(t)$. Da $\mathbb{E}(X^2(t)) = \Delta x^2 \lfloor \frac{t}{\Delta t} \rfloor$ gilt, folgt

$$\mathbb{E}X^2(t) \simeq (\Delta x)^2 \frac{t}{\Delta t}. \tag{55}$$

Damit diese Varianz strikt positiv und endlich bleibt, muss Δx von Größenordnung $\sqrt{\Delta t}$ sein. Sei daher $\Delta x = \sqrt{\Delta t}$ und $\Delta t = \frac{1}{n}$, somit genügen Δx und Δt den oben gestellten Anforderungen. Somit gilt für alle i $Y_i = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$ jeweils mit halber Wahrscheinlichkeit. Daraus folgt, dass X folgende Verteilung besitzt

$$X^{(n)}(t) = \frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} = \sqrt{t}\frac{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{nt}} \tag{56}$$

wobei jedes Z_i eine Zufallsvariable ist, die mit halber Wahrscheinlichkeit $+1$ oder -1 annimmt. Laut dem zentralen Grenzwertsatz konvergiert $X^{(n)}(t)$ zu einer Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz t für $n \to \infty$. Es kann weiters gezeigt werden, dass alle multivariaten Verteilungen von $X^{(n)}(t)$ asymptotisch identisch zu denen der Brownschen Bewegung sind.

3.1.2 Die Axiome der Brownschen Bewegung

Die drei Axiome der Brownschen Bewegung sind:

- *Unabhängigkeit*: Die Zufallsvariable $B(t + \Delta t) - B(t)$ ist unabhängig von der von allen Zufallsvariablen bis zum Zeitpunkt t generierten Sigmaalgebra. Das heißt, dass die Positionsänderungen in der Zeit von t bis $t + \Delta t$ unabhängig von dem sind, was bis zum Zeitpunkt t geschah.
- *Stationarität*: Die Verteilung der Zufallsvariable $B(t + \Delta t) - B(t)$ ist unabhängig von t.
- *Stetigkeit*:Für alle $\delta > 0$: $\lim\limits_{\delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}(|B(t+\Delta t) - B(t)| \geq \delta)}{\Delta t} = 0$.

Das dritte Axiom dient zur Gewährleistung der Stetigkeit der einzelner Pfade $B(t,\omega)$. Da dies aber sehr aufwendig zu zeigen ist, wird nur gezeigt, dass das dritte Axiom fast äquivalent dazu ist, dass $B(t)$ mit Wahrscheinlichkeit 1 Stetig in t ist.
Sei dazu $\delta > 0$ fix und

$$Y_n = \max_{t \leq k \leq n} |B(\frac{k}{n}) - B(\frac{k-1}{n})|. \tag{57}$$

Falls $Y_n \to 0$ gilt, dann ist $B(t)$ tatsächlich stetig auf [0,1] und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \geq \delta) = 0. \tag{58}$$

Aus der Unabhängigkeit und Stationarität von $B(\frac{1}{n}) - B(0), B(\frac{2}{n}) - B(\frac{1}{n}), \dots$ folgt:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(Y_n \geq \delta) & = & 1 - \mathbb{P}(Y_n < \delta) \\ & = & 1 - \mathbb{P}(|B(\frac{1}{n} - B(0)| < \delta)^n \\ & = & 1 - [1 - \mathbb{P}(|B(\frac{1}{n}) - B(0)| \geq \delta)]^n \\ & \approx & 1 - \exp -n\mathbb{P}(|B(\frac{1}{n}) - B(0)| \geq \delta) \end{array},$$

da $1 - t \approx e^{-t}$. Daher gilt $\mathbb{P}(Y_n \geq \delta) \to 0$ genau dann, wenn $n\mathbb{P}(|B(\frac{1}{n}) - B(0)| \geq \delta) \to 0$, das dem Stetigkeitsaxiom mit $\delta t = \frac{1}{n}$ entspricht. Somit ist 58 Äquivalent zum Stetigkeitsaxiom.

3.1.3 Eigenschaften der Brownschen Bewegung

Falls $B(0) = 0$ gilt, existieren μ und σ so, dass für alle t gilt, dass $B(t)$ eine Verteilung mit Erwartungswert μt und Varianz $\sigma^2 t$ hat. Falls zusätzlich $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ gelten, sagt man B ist eine Standard Brownsche Bewegung. Man kann weiteres zeigen, dass fast alle Brownsche Pfade nirgends differenzierbar sind.

3.1.4 Berechnung von Kennzahlen

Für die Brownsche Bewegung lassen sich viele Kennzahlen als explizite Formeln darstellen.
Als erstes betrachtet man die Wahrscheinlichkeit p, dass der Prozess S vor 0 erreicht, falls der Startwert w war (dh. $X(0) = w$). Dieses p ist äquivalent zur Wahrscheinlichkeit, dass $S - w$ vor $-w$ erreicht wird, falls der Startwert 0 war. Mit $a = -w$ und $b = S - w$ ist die Durchlauflaufzeit, die Zeit bei dem Zuerst a oder b getroffen wird, definiert als

$$T = \inf\{t \geq X(t) = a \text{ oder } X(t) = b\} \tag{59}$$

Zuerst behandelt man den Fall $\mu = 0$. Da $X(0) = 0$ und $\mu = 0$ gelten, folgt $\mathbb{E}(X(t)) = 0$, deswegen folgt, wie noch später gezeigt wird,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}(X(T)) \\ &= a\mathbb{P}(X(T) = a) + b\mathbb{P}(X(T) = b) \\ &= a(1-p) + bp \end{aligned} \tag{60}$$

Durch Auflösen nach p folgt

$$p = \frac{-a}{b-a} = \frac{w}{S} \tag{61}$$

Zu zeigen bleibt $\mathbb{E}(X(T)) = 0$. Dazu muss man nur zeigen, dass T die Anforderungen des folgenden Satzes erfüllt.

Satz 3 (Optional Sampling Theorem)**.** *Sei $\{X(t)\}$ ein Martingal und T eine Stoppzeit. Dann gilt:*

$$\left(\mathbb{P}(T < \infty) = 1 \;\wedge\; \mathbb{E}(|X(T)|) < \infty \;\wedge\; \int\limits_{\{T>t\}} X(t)\mathbb{P}(d\omega) \to 0 \textit{ für } t \to \infty\right) \tag{62}$$
$$\Rightarrow (\mathbb{E}(X(T)) = \mathbb{E}(X(0)))\,.$$

Da für alle $t \leq T$ $|X(t)| \leq |a| + b$ gilt, wird die zweite Bedingung in 62 erfüllt. Um zu zeigen, dass die Treffzeit T von a oder b endlich ist, zeigt man, dass $V(t) \equiv X^2(t) - \sigma^2 t$ ein Martingal ist.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2(t+s)|X^2(t) = v^2) &= \mathbb{E}\{[X(t+s) - X(t) + X(t)]^2|X^2(t) = v^2\} \\ &= \mathbb{E}\{(X(t+s) - X(t))^2|X^2(t) = v^2\} \pm 2v\mathbb{E}\{X(t+s) - X(t)\} + v^2 \\ &= s\sigma^2 + 0 + v^2 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\mathbb{E}\{V(t+s)|V(t) = u\} = s\sigma^2 + v^2 - \sigma^2(t+s) = u.$$

Da $T \wedge t$ 62 erfüllt, gilt $\mathbb{E}\{V(T \wedge t)\} = EV(0) = 0$ und somit

$$\sigma^2\mathbb{E}(T \wedge t) = \mathbb{E}\{X^2(T \wedge t)\} \leq a^2 + b^2, \text{ für alle } t \geq 0. \tag{63}$$

Betrachtet man bei 63 den Grenzwert, sieht man, dass $\mathbb{E}(T)$ endlich ist und daher $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ gilt.

Als nächstes berechnet man $\mathbb{E}(T)$, also die erwartete Zeit nach dem ein Transfer vorgenommen wird (z.B.: von Bargeld in Wertpapiere, falls zuerst S erreicht wird und von

Wertpapiere in Bargeld, falls 0 erreicht wird). Da $V(t)$ ein Martingal ist, das die Anforderungen des Optional Sampling Theorems erfüllt, gelten

$$0 = \mathbb{E}[V(0)] = \mathbb{E}[V(T)] = \mathbb{E}(X^2(T)) - \sigma^2\mathbb{E}(T) \tag{64}$$

und

$$\mathbb{E}(T) = \frac{\mathbb{E}(X^2(T))}{\sigma^2} = \frac{[a^2(1-p) + b^2 p]}{\sigma^2} = \frac{w(S-w)}{\sigma^2}. \tag{65}$$

3.1.5 Effizienzmarkthypothese

Im Kapitalmarkt spielen Preise eine wichtige Rolle, da Unternehmen sie als Grundlage für ihre Investitionsentscheidungen verwenden. Die Frage, die sich sofort stellt, ist wie informativ diese Preise sind. Fama(1970) unterscheidet zwischen drei verschiedene Arten von Information.

- Information ist in den Preisen aus früheren Perioden enthalten ($\mathfrak{F}_1$),
- Information ist in den Preisen aus früheren Perioden und zusätzlich in allen vergangenen publiken Ereignisse enthalten ($\mathfrak{F}_2$),
- Information ist in allen vergangenen Ereignissen enthalten ($\mathfrak{F}_3$).

Klarerweise gilt $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}_3$. Falls der Preisprozess ein Martingal bezüglich $\mathfrak{F}_1$ ist, sagt man, dass der Markt *schwach effizient* ist; falls er bezüglich $\mathfrak{F}_2$ ein Martingal ist, ist der Markt *halbstark effizient*; falls er sogar bezüglich $\mathfrak{F}_3$ ein Martingal ist, ist der Markt *stark effizient*.

Die Gründe für die Verwendung von Martingalen sind, dass sie eine einfache Definition haben, empirisch getestet werden können, und sie dem fairen Spiel entsprechen.

3.2 Stochastisches Modell vom Vorrat und Bedarf nach Barguthaben (Zeitdiskret)

Miller und Orr(1966) entwickelten ein Modell, bei dem das Unternehmen genau zwei Vermögenswerte besitzt, nämlich Barguthaben und ein Portfolio von liquiden Assets. Die Zinsen, die das Portfolio einbringt bezeichnet man mit r. Bei jedem Transfer fallen Kosten an, die man mit γ bezeichnet. Die Schwankungen vom Barguthaben werden anhand eines symmetrischen Random Walkes modelliert, das heißt, während einem bestimmten Zeitintervall vergrößert oder vermindert sich das Barguthaben um genau m Einheiten (Dollars) mit Wahrscheinlichkeit p beziehungsweise $1-p$. Ziel des Unternehmens ist die langfristigen Durchschnittskosten für die Regelung der Höhe des Barguthabens zu minimieren.

Wie oben erwähnt, wird das Barguthaben von einem Random Walk geregelt und kann zwischen 0 und h liegen. Falls die obere Grenze h erreicht wird, werden $h - z$ Einheiten Bargeld auf das Portfolio von liquiden Assets transferiert. Wird 0 erreicht, werden z Einheiten Bargeld vom Portfolio von liquiden Assets in Bargeld konvertiert. Miller und Orr berechneten die optimalen Werte für h und z:

Die steady-state Verteilung vom Bargeldbestand ist die Dreiecksverteilung mit Mittel $\frac{h+z}{3}$. Miller und Orr bezeichneten dieses Mittel als langfristigen durchschnittlichen Bedarf nach Barguthaben. Die optimalen Werte für h und z sind

$$h^* = 3z^* \text{ und } z^* = (\frac{3\gamma}{4r}\sigma^2)^{\frac{1}{3}} \tag{66}$$

und somit der Bedarf nach Bargeld

$$M = \frac{h * + z *}{3} = \frac{4}{3}(\frac{3\gamma}{4r}\sigma^2)^{\frac{1}{3}} \tag{67}$$

4 Quellen

- The Economics of Uncertainty (Kapitel 6) von S.A Lippman und J.J. McCall
- http://de.wikipedia.org/wiki/Brownsche_Bewegung