

Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik

**Risk analysis and valuation of life
insurance contracts: Combining
actuarial and financial approaches**

Knoll Mario 0627643

WS 2012/13

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
2	Modellrahmen	5
	2.1. Versicherungsgesellschaft	5
	2.2. Finanzmarkt	5
	2.3. Anlagestrategien des Versicherers	7
	2.4. Haftungsmodelle	8
3	Methodik	11
4	Numerische Ergebnisse	13
	4.1. Punkt-zu-Punkt-Versicherung.....	13
	4.2. MUST-Fall.....	17
	4.3. IS-Fall	20
5	Fazit und Ausblick	23
	Anhang	24
	Quellenangaben.....	27

Inhaltsangabe/Zusammenfassung

In diesem Artikel analysieren wir traditionelle (d.h. nicht fondsgebundene) gewinnbeteiligte Lebensversicherungsverträge mit einem garantierten Zinssatz und Überschussbeteiligung. Wir betrachten drei verschiedene Gewinnzuteilungsmodelle und einem Vermögensportfolio, das aus Kapitalmarkt, Anleihen mit unterschiedlichen Laufzeiten und Aktien besteht. In dieser Situation kombinieren wir versicherungsmathematische- und finanzielle Ansätze, indem man ein risikominimierendes Vermögensportfolio (unter dem realen Maß \mathbb{P}) wählt und abschließend Überschüsse verteilt, so dass der Vertragswert (unter dem realen Maß der Preisgestaltung \mathbb{Q}) fair ist. Wir beweisen, dass diese Strategie immer möglich, es sei denn, die Versicherungsverträge führen Arbitrage-Möglichkeiten auf den Markt ein. Wir analysieren dann Unterschiede zwischen den verschiedenen Gewinnzuteilungsmodellen und untersuchen den Einfluss des gewählten Risikomaßes auf das risikominimierende Portfolio.

1. Einführung

Zinsgarantien sind in vielen Märkten, ein sehr häufiges Produktmerkmal innerhalb der traditionellen gewinnbeteiligten Lebensversicherungen. Es gibt zwei Haupttypen von Zinsgarantien: Die einfachste Zinsgarantie ist eine sogenannte Punkt-zu-Punkt-Versicherung, d.h. eine Versicherung, die nur am Ende der Laufzeit des Vertrages relevant ist. Die andere Art wird als Gruppen- (oder Jahr-zu-Jahr-)-Versicherung bezeichnet. Dies bedeutet, dass die Versicherungsnehmer ein Konto haben, auf das jedes Jahr zumindest eine bestimmte garantierte Rendite gutgeschrieben werden muss. Gruppenversicherungen können natürlich die Versicherer zwingen, Konten auf denen bereits ein großer Teil der Überschüsse der letzten Jahre bereits gutgeschrieben wurde, relativ hohe garantierte Zinssätze anzubieten. Unerwünschte Kapitalmarkt Szenarien, die in den letzten Jahren erschienen sind, haben erhebliche Probleme für die Versicherer verursacht, diese Art von Versicherung anzubieten. Daher ist die Analyse der traditionellen Lebensversicherungsverträge mit Gruppenversicherungen zu einem Thema von wachsender Bedeutung, sowohl für die akademische Welt als auch für Praktiker, geworden.

Es gibt so genannte finanz- und versicherungsmathematische Ansätze, um finanzielle Garantien in Lebensversicherungsverträgen zu behandeln. Der finanzielle Ansatz befasst sich mit einer risikoneutralen Bewertung und fairer Preisgestaltung und wurde von verschiedenen Autoren wie Bryis und de Varenne (1997), Grosen und Jørgensen (2000), Grosen und Jørgensen (2002) oder Bauer et al (2006) erforscht. Beachte, dass das Konzept der risikoneutralen Bewertung auf der Annahme einer perfekten (oder Super-) Hedging-Strategie basiert, welcher die Versicherungen normalerweise nicht folgen (oder nicht folgen können, vgl. z.B. Bauer et al. (2006)). Wenn der Versicherer nicht in ein Portfolio investiert (oder nicht kann), das die Verbindlichkeiten repliziert, bleibt das Unternehmen gefährdet und sollte daher zusätzlich einige Risikoanalysen durchführen. Der versicherungsmathematische Ansatz konzentriert sich auf die Quantifizierung dieses Risikos mit geeigneten Risikomaßen unter einem objektiven „realen“ Wahrscheinlichkeitsmaß, vgl. z.B. Kling et al. (2007a) oder Kling et al. (2007b). Solche Ansätze spielen auch beispielsweise in der Beurteilung der Bonität oder unter dem neuen Solvency II-Ansatz, eine wichtige Rolle. Unter anderem untersuchen Gatzert und Kling (2007) Parameter-Kombinationen, die faire Verträge ergeben und analysieren das Risiko, beruhend auf faire Verträge für verschiedene Versicherungsvertragsmodelle,

beginnend mit einer einfachen allgemeinen Punkt-zu-Punkt-Versicherung, um danach anspruchsvollere dänische- und britische Vertragsmodelle zu untersuchen. Kling (2007) konzentriert sich auf die traditionellen deutschen Versicherungsverträge, wobei die gegenseitige Abhängigkeit der verschiedenen Parameter bzgl. des Gefährdungspotenzials der fairen Verträge untersucht wird. Gatzert (2008) erweitert die Arbeit von Gatzert und Kling (2007), wo ein Ansatz zur "Preisbildung des Risikos" eingeführt wird und um mit der Verwendung des "angemessenem Werts des Ausfalls", Verträge mit dem gleichen Gefährdungspotenzial zu bestimmen. Allerdings vernachlässigt dieses Risikomaß reale Szenarien und wird nur mit dem (risikoneutralen) Wert der eingeführten Standard-Put-Option betroffen sein. Während Gatzert (2008) einige reale Risiken, welche durch die betrachteten Verträge erzeugt werden, analysiert, wird das Gefährdungspotenzial nicht ins Kalkulationsschema aufgenommen.

Barbarin und Devolder (2005) führen eine Methodik ein, die das Kombinieren des finanz- und versicherungsmathematischen Ansatzes ermöglicht. Sie betrachten einen Vertrag, der ähnlich dem von Bryis und de Varenne ist (1997), mit einer Punkt-zu-Punkt-Versicherung und abschließender Überschussbeteiligung. Um beide Ansätze zu integrieren, verwenden sie zur Preisgestaltung von Lebensversicherungsverträgen eine Methode in zwei Stufen: Unter Verwendung von Value at Risk- und Expected Shortfall-Risikomaßen, bestimmen sie zunächst eine garantierte Verzinsung, so dass bestimmte Solvabilitätsanforderungen erfüllt sind. Und zweitens, um faire Verträge zu erhalten, verwenden sie eine risikoneutrale Bewertung und passen die abschließende Überschussbeteiligung entsprechend an.

In der vorliegenden Arbeit erweitern wir die Methode von Barbarin und Devolder (2005), die es dann ermöglicht die Preise für Lebensversicherungsverträgen mit allgemeineren Haftungs- und Rahmenbedingungen, insbesondere auch typische Produkteigenschaften des deutschen Versicherungsmarktes und ein Vermögensportfolio, das aus Kapitalmarkt, Anleihen mit unterschiedlichen Laufzeiten und Aktien besteht, zu bilden. Wir identifizieren Parameter-Kombinationen, die das reale Risiko minimieren, ohne den angemessenen Wert des Vertrages zu ändern. Wir beweisen, dass die vorgeschlagene Methodik funktioniert, es sei denn die Gestaltung des Versicherungsvertrages lässt Arbitragemöglichkeiten mit einfließen.

Der Rest dieses Artikels ist wie folgt organisiert. Nach einer Einführung des betrachteten Finanzmarktes, dem Vermögensportfolio des Versicherers und verschiedenen Haftungsmodellen in Abschnitt 2, präsentiert Abschnitt 3 unsere Methodik zum Kombinieren des versicherungs- und finanzmathematischen Ansatzes und das theoretische Ergebnis, dass die von uns vorgeschlagene Strategie immer möglich ist, außer wenn die Versicherungsverträge Arbitragemöglichkeiten auf den Markt mit einbeziehen. In Abschnitt 4 zeigen wir verschiedene numerische Ergebnisse für die eingeführten Haftungsmodelle, die sich sowohl auf das Risiko einer bestimmten Vertragsgestaltung und dem von der Versicherungsgesellschaft auferlegten Vermögensportfolio konzentrieren und der Bewertung des Vertrages von der Perspektive des Kunden. Wir untersuchen außerdem, wie die Ergebnisse von dem gewählten Risikomaß abhängen. Abschnitt 5 schließt.

2. Modellrahmen

2.1. Versicherungsgesellschaft

Nach Kling et al. (2007a), betrachten wir eine vereinfachte "Bilanz" der Versicherungsgesellschaft wie folgt:

Aktiva	Passiva
	$L(t)$
$A(t)$	$B(t)$
	$R(t)$
$A(t)$	$A(t)$

Dabei bezeichnet $A(t)$ den Marktwert der Vermögenswerte des Unternehmens. $L(t)$ stellt die Verbindlichkeiten der Versicherer, gemessen an den Deckungsrückstellungen für die Versicherungsverträge, dar. Jedes Jahr muss $L(t)$ mindestens einen festen garantierten Zinssatz i verdienen, damit $L(t + 1) \geq L(t)(1 + i)$. Der Versicherte kann an der Gesamtkapitalrendite des Versicherers, bei Überschreiten des garantierten Zinssatz, auf zwei Arten teilnehmen: Durch regelmäßige Überschussbeteiligung, wenn in einem Jahr mehr als der garantierte Zinssatz i auf das Konto L gutgeschrieben wird und bei abschließender Überschussbeteiligung. $B(t)$ -Modelle, ein kollektives Abschluss-Überschuss-Konto, das verwendet wird, um zusätzliche Überschussbeteiligung bei Fälligkeit des Vertrages eines Kunden, bereitzustellen. Dieses Konto kann jederzeit reduziert werden, um die Liquidität des Unternehmens, die $B(t)$, als eine optionale Bonuszahlung und $B(t) \geq 0$ für alle t belassen, zu gewährleisten. Der Restwert $R(t) = A(t) - (L(t) + B(t))$ bezeichnet die (versteckten) Reserven der Lebensversicherer.

2.2. Finanzmarkt

Wir führen jetzt das Modell für den Finanzmarkt und die Finanzinstrumente des Vermögensportefolles des Versicherers ein. Wir erlauben Investitionen in den Geldmarkt, Anleihen und Aktien. Wir verwenden das Vasicek (1977) Modell für stochastische Zinssätze und eine geometrische Brownsche Bewegung (vgl. Black and Scholes, 1973) für eine Bezugnahme auf Aktien oder Aktienindizes.

Wir beschreiben zunächst unser Anlage-Modell unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} und wechseln dann auf das risikoneutrale Maß \mathbb{Q} , welches zum Zweck der Bewertung verwendet wird. Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit der natürlichen Filtration $\mathbb{F} = \mathcal{F}_t = \sigma((W_1(s), W_2(s)), s \leq t)$, generiert durch unabhängige \mathbb{P} -Brownsche Bewegungen $W_1(t)$ und $W_2(t)$, und sei $r(t)$ der kurzfristige Zinssatz und $S(t)$ der Wert der Aktie zum Zeitpunkt t .

Das Anlage-Modell wird dann durch die stochastischen Differentialgleichungen (SDGn) gegeben

$$\begin{aligned} dr(t) &= a(b - r(t))dt + \sigma_r dW_1(t) \\ dS(t) &= S(t) \left(\mu dt + \sigma_S \left(\rho dW_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2(t) \right) \right) \end{aligned}$$

mit Korrelation $\rho \in [-1, 1]$.

Um die Notation zu vereinfachen, definieren wir $W_3(t) := \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_2(t)$. Somit ist für $t_1 \leq t_2$, eine Lösung in geschlossener Form der oben genannten SDGn gegeben durch

$$r(t_2) = e^{-a(t_2-t_1)} r(t_1) + b(1 - e^{-a(t_2-t_1)}) + \sigma_r e^{-at_2} \int_{t_1}^{t_2} e^{au} dW_1(u)$$

$$S(t_2) = S(t_1) e^{\left\{ \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma_S^2 \right) (t_2 - t_1) + \sigma_S (W_3(t_2) - W_3(t_1)) \right\}}$$

Eine Kapitalmarktanlage wird dann durch eine Investition mit dem kurzfristigen Zinssatz wie folgt modelliert:

$$\beta(t) = e^{\int_0^t r(s) ds}.$$

Wir betrachten weiterhin ein Anleihen-Portfolio, bestehend aus verschiedenen Null-Coupon-Anleihen. Daher müssen wir $p(t, T)$, den Preis zum Zeitpunkt t einer Null-Coupon-Anleihe mit Fälligkeit T bestimmen. Wir nehmen an, dass $p(t, T) = F(t, r(t))$ für einige glatte Funktionen $F(t, r(t))$ gilt. Da der kurzfristige Zinssatz nicht am Markt beobachtbar ist, sind wir möglicherweise nicht in der Lage, mittels Derivaten den kurzfristigen Zinssatz (z.B. Null-Coupon-Anleihen), durch Investitionen den Basiswert selbst abzusichern, wie es z.B. im Rahmen des Black-Scholes-Modells getan werden könnte. Stattdessen würde eine Bankkontoinvestition zu einem unvollständigen Markt führen.

Durch den Aufbau eines Portfolios ohne sofortiges Risiko (z. B. bestehend aus zwei Null-Coupon-Anleihen mit unterschiedlichen Laufzeiten) und die Anwendung keiner Arbitrage-Argumente, gelangt man zu dem sogenannten Marktpreis des Risikos $\lambda(t, r(t))$ und damit auf eine partielle Differentialgleichung oder „auf Preise für Null-Coupon-Anleihen“, die sogenannte mathematische Gleichung der Zinsstruktur.

$$F_t(t, r(t)) + (a(b - r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma_r) F_r(t, r(t)) + \frac{1}{2} \sigma_r^2 F_{rr}(t, r(t)) - r(t) F(t, r(t)) = 0$$

mit der Abschlussbedingung $F(T, r(T)) = 1$.

Die Feynman-Kač Formel ermöglicht dann eine wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation der obigen partiellen Differentialgleichung durch

$$p(t, T) = F(t, r(t)) = \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}} \left(e^{-\int_t^T r(s) ds} \middle| r(t) \right)$$

mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{\mathbb{Q}}$ und einem stochastischen Prozess $r(t)$ mit $\tilde{\mathbb{Q}}$ -Dynamiken $dr(t) = (a(b - r(t)) - \lambda(t, r(t))\sigma_r) dt + \sigma_r d\tilde{W}_1$. Beachten Sie, dass die beobachteten Preise für Null-Coupon-Anleihen den Marktpreis des Risikos $\lambda(t, r(t))$ erzeugen und somit keine offensichtliche Form oder Parametrisierung $\lambda(t, r(t))$ ad hoc existiert. Jedoch genau dann, wenn wir annehmen, dass $\lambda(t, r(t)) = \lambda$, dann bleibt für den Prozess des kurzfristigen Zinssatzes unter $\tilde{\mathbb{Q}}$ der Vasicek-Typ erhalten. Aus der Standard Zins-Theorie (vgl. z. B. Björk, 2005) folgt, dass $p(t, T) = e^{A(t, T) - B(t, T)r(t)}$ mit $A(t, T) = \left(\frac{\sigma_r^2}{2a^2} - b + \frac{\lambda\sigma_r}{a} \right) ((T - t) - B(t, T)) - \frac{\sigma_r^2}{4a} B(t, T)^2$ und $B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)} - 1)$. Somit folgt $p(t, T)$ einer Log-Normalverteilung für $t < T$ und durch die Anwendung des Itô-Lemmas, wird die reale Welt Dynamik der Null-Coupon-Anleihe wie folgt abgeleitet $dp(t, T) = p(t, T) \left((r(t) - \lambda\sigma_r B(t, T)) dt - \sigma_r B(t, T) dW_1(t) \right)$. Definiert man ein Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{Q} äquivalent zu \mathbb{P} durch die Radon-Nikodym Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{F_t} = \exp \left\{ -\lambda W_1(t) - \frac{1}{2} \lambda^2 t - \int_0^t \frac{\mu - r(s) - \rho \lambda \sigma_S}{\sigma_S \sqrt{1 - \rho^2}} dW_2(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{\mu - r(s) - \rho \lambda \sigma_S}{\sigma_S \sqrt{1 - \rho^2}} \right)^2 ds \right\}$$

ergibt das, dass $\left(e^{-\int_0^t r(s) ds} S(t) \right)_{t \geq 0}$ und $\left(e^{-\int_0^t r(s) ds} p(t, T) \right)_{t \geq 0, t < T}$ \mathbb{Q} -Martingale sind.

Dies bietet eine komplette Aufstellung für die Risikoanalyse, unter dem realen Maß \mathbb{P} und Bewertungsmethoden für die Verwendung des risikoneutralen Maßes \mathbb{Q} .

2.3. Anlagestrategien des Versicherers

Jetzt stellen wir die Anlagestrategie des Versicherers vor, die zusammengesetzt ist aus, den obigen Anlageinstrumenten und T , welche jene Variable ist, die den Zeithorizont betrachtet. Wir gehen davon aus, dass der Versicherer in den Kapitalmarkt mit einem konstanten (F_0 -messbaren) Anteil x_β , an der Börse mit einem konstanten Anteil x_S und in den Anleihemarkt mit einem konstanten Anteil x_B , investiert. Diese Anteile werden stabil gehalten und durch kontinuierliche Neugewichtung erfüllen sie $x_\beta + x_S + x_B = 1$.

Wir gehen davon aus, dass Null-Coupon-Anleihen mit einer Restlaufzeit von $1, 2, \dots, T^*$ Jahren, mit Fälligkeit an jedem Jahrestag, wobei T^* die maximale Dauer einer Anleihe bezeichnet, die der Versicherer bereit ist zu investieren, existieren. Für $t \in [i, i + 1)$ wird die F_t -messbare Zufallsvariable x_{ij} als der Anteil der Anleihe mit der Zeit bis zur Endfälligkeit j bezeichnet, welche innerhalb des Anleiheportfolios während des jeweiligen Jahres stattfindet. Dieser Anteil wird innerhalb des Jahres so angenommen, dass er konstant gehalten wird, d.h. über den Zeitraum $[i, i + 1)$ durch kontinuierliche Neugewichtung. Um die Notation zu vereinfachen, setzen wir eine "Umstrukturierung" des Anleiheportfolios voraus, d.h. eine Veränderung der x_{ij} tritt nur bei den Fälligkeiten $0, 1, \dots, T - 1$ ein. Natürlich benötigen wir $\sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} = 1 \forall i$.

Wir bezeichnen die F_t -messbare Zufallsvariable $c_\beta(t)$ als die Anzahl der Aktien auf dem Kapitalmarkt-Konto $\beta(t)$, die von der Versicherungsgesellschaft gehalten werden. Analog ist $c_S(t)$ die Anzahl der Aktien an der Börse $S(t)$ zum Zeitpunkt t und $c_{ij}(t)$ bezeichnet die Anzahl der Anleihen mit Fälligkeit zum Zeitpunkt $i + j$, die die Gesellschaft zum Zeitpunkt $t \in [i, i + 1)$ hält.

Daraus ergibt sich $\frac{c_\beta(t)\beta(t)}{A(t)} = x_\beta$, $\frac{c_S(t)S(t)}{A(t)} = x_S$, $\frac{\sum_{j=1}^{T^*} c_{ij}(t)p(t, j+i)}{A(t)} = x_B$ und $\frac{c_{ij}(t)p(t, j+i)}{\sum_{j=1}^{T^*} c_{ij}(t)p(t, j+i)} = x_{ij}$ für $t \in [i, i + 1)$. Schließlich erhalten wir $A(t) = c_\beta(t)\beta(t) + c_S(t)S(t) + \sum_{j=1}^{T^*} c_{ij}(t)p(t, i + j)$.

Selbstfinanzierendes Portfolio

Wir gehen davon aus, dass das betroffene Portfolio selbstfinanzierend ist. Somit erhalten wir für $t \in [i, i + 1)$, $dA(t) = c_\beta(t)d\beta(t) + c_S(t)dS(t) + \sum_{j=1}^{T^*} c_{ij}(t)dp(t, i + j)$. So können die Dynamiken des Vermögensportfolios des Versicherers wie folgt geschrieben werden

$$\frac{dA(t)}{A(t)} = x_\beta r(t)dt + x_S(\mu dt + \sigma_S dW_3(t)) + \sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} x_B \left((r(t) - \lambda \sigma_r B(t, i + j))dt - \sigma_r B(t, i + j) dW_1(t) \right)$$

was bei gegebenem F_i für $t \in [i, i + 1)$ eine Lognormalverteilung von $A(t)$ impliziert (für einen Beweis, siehe Anhang A). Wenn wir weiter annehmen, x_{ij} sei F_0 -messbar (d.h. deterministisch), dann folgt das Vermögensportfolio des Versicherers einer geometrischen Brownschen Bewegung mit zeitabhängiger Abweichung und Volatilität.

Zu diesem Zeitpunkt könnte man sich fragen, warum wir verschiedene stochastische Prozesse für Zinsen und Aktien eingeführt haben, wenn wir über eine einfache geometrische Brownsche Bewegung (GBB) letztendlich zu einem Vermögensportfolio kommen (unter den obigen Annahmen). Zunächst möchten wir betonen, dass dies die Annahme rechtfertigt (z. B. durch Gatzert (2008), Kling et al. (2007a) oder Kling et al. (2007b) und viele andere), dass in Abhängigkeit einer GBB ein Vermögensportfolio des Versicherer entsteht. Auf der anderen Seite, gibt uns unsere Modellstruktur mehr Flexibilität: Wenn wir Derivate bewerten, die vom Anlagevermögen abhängen und im Portfolio enthalten sind, dann können wir mit den entsprechenden Prozessen $r(t)$ und $S(t)$ arbeiten, um entsprechende Ergebnisse zu erzielen. Schließlich durch Lockerung einiger der erwähnten Annahmen, ermöglicht unser Modell die Zusammensetzung des Vermögensportfolio, durch zeit- und wegabhängige Modellierungen, die dann - natürlich - zu einem komplizierteren stochastischen Prozess führen, und einen Teil der analytischen Lenkbarkeit, welcher bei dem GBB-Aufbau ausgenutzt wird, verliert.

2.4. Haftungsmodelle

Punkt-zu-Punkt Modell

Wir beginnen mit der Einführung eines einfachen Haftungsmodells ähnlich Bryis und de Varenne (1997) oder Barbarin und Devolder (2005) und betrachten einen befristeten Vertrag mit Einmalprämie P , garantiertem Zinssatz i und einer abschließenden Bonusbeteiligungsquote $\eta > 0$. Deshalb werden jedes Jahr die garantierten Zinsen der Deckungsrückstellung angerechnet und bei der Fälligkeit des Vertrages ist eine zusätzliche Überschussbeteiligung vorgesehen. Diese muss positiv sein, d.h. die zuvor gutgeschrieben Zinsen können am Ende der Laufzeit des Vertrages nicht wieder zurückgenommen werden. Daher erhalten wir für $t = 1, \dots, T$

$$L(t) = P(1 + i)^t, B(T) = \eta \max\{A(T) - L(T), 0\}.$$

Nehmen wir weiter an, der Pauschalbetrag P wird, wie im oberen Abschnitt modelliert, in das Referenzportfolio des Versicherers investiert, was dann $A(0) = P$ ergibt.

Wie erwähnt, hat η keinen Einfluss auf das Risiko der Unterdeckung des Unternehmens, während der Laufzeit des Vertrages. Daher hängt das Gefährdungspotenzial nur von den Parametern des Vermögensportfolios und dem garantierten Zins ab. Daher kann η unabhängig gewählt werden, um den gewünschten Vertragswert zu erreichen.

Gruppenversicherung: der MUST-Fall

Jetzt erweitern wir das Vorgängermodell, einschließlich jährlicher Überschussbeteiligung, die gesetzlich verbindlich ist, wie z.B. in Deutschland. Hier, nach Bauer et al. (2006), unterscheiden wir zwischen dem sogenannten MUST-Fall, der in diesem Abschnitt erklärt wird (d.h. das ist der Fall, dass ein Versicherer gerade genug Überschuss verteilt, um die gesetzlichen Anforderungen zu erfüllen) und der sogenannte IS-Fall, welcher im nächsten Abschnitt erklärt wird, welcher versucht das Verhalten von beobachteten deutschen Versicherer, die auch durch den Wettbewerb beeinflusst werden, zu modellieren. Für weitere Einzelheiten, siehe Bauer et al. (2006).

Durch konservative Preisgestaltung der Produkte, erreichen Versicherungen in der Regel Erträge aus ihren Vermögenswerte, die die garantierten Zinsen übersteigen. In vielen Ländern sind die Versicherten gesetzlich berechtigt, an dem sich ergebenden Überschuss zu beteiligen. Z.B. in Deutschland, zumindest $\delta = 90\%$ der Rendite des Unternehmens, die über dem garantierten Zinssatz liegt, muss an die Versicherten verteilt werden. Allerdings werden die erzielten Überschüsse an den Buchwerten der Vermögenswerte berechnet, die mit $A_b(t)$ bezeichnet werden. Da die Bilanzrichtlinien den Versicherern gewisse Freiheiten bei der Verwaltung ihrer Buchwerte geben, können sie auch, zumindest Teile, der Überschussbeteiligung verwalten.

Buchwerte, nach deutschem Handelsrecht, sind wie folgt modelliert: Wir gehen davon aus, dass Aktien das sogenannte "Niederstwertprinzip" ausüben, was bedeutet, dass der Buchwert einer Aktie den Kaufpreis nicht übersteigen kann. Ferner, wenn der Marktwert unter den Buchwert fällt, kann der Versicherer unter bestimmten Umständen, Abschreibungen vermeiden. Aus Gründen der Einfachheit, gehen wir daher davon aus, dass der Buchwert der Aktie immer mit dem ursprünglichen Wert übereinstimmt. Marktpreisschwankungen werden nur in der Differenz zwischen Markt- und Buchwert der Vermögenswerte, den sogenannten stillen Reserven (oder nicht berücksichtigte Verluste, wenn negative) dargestellt. Bezüglich des Anleiheportfolios unterscheiden wir zwischen Inhaber- und Namensschuldverschreibungen, und bezeichnen mit y_B den Anteil der Namensschuldverschreibungen in unserem Anleiheportfolio. Nach deutschen Bilanzierungsvorschriften, verwenden wir das Niederstwertprinzip auch für Inhaberschuldverschreibungen und lassen die Buchwerte der Beteiligungen, mit den Marktwerten am Kapitalmarkt und den Namensschuldverschreibungen, übereinstimmen. Daraus ergibt $A_b(t) = x_B A(t) + y_B x_B A(t) + (x_S + (1 - y_B)x_B)A(0)$.

Zusammenfassend und inklusive Überschuss, erhalten wir, für $t = 1, \dots, T$, folgende Entwicklung der Verbindlichkeiten:

$$\begin{aligned} L(t) &= L(t-1)(1+i) + \max\{\delta(A_b(t) - A_b(t-1)) - iL(t-1), 0\}, \\ B(T) &= \eta \max\{A(T) - L(T), 0\} \end{aligned}$$

beginnend mit $L(0) = P$. Anmerkung: die Gewährung des Überschusses am Deckungskapital L bedeutet, dass der vergangene Überschuss auch berechtigt ist, den künftigen garantierten Zinssatz zu erwirtschaften.

Gruppenversicherung: der IS-Fall

Wir beschreiben nun, wie deutsche Versicherungsgesellschaften in der Regel Überschussbeteiligung erlauben. Um finanzielle Stabilität auf dem Markt zu signalisieren, versuchen sie, die Überschussbeteiligung über die Zeit recht stabil zu halten. Somit, in Anlehnung an Kling et al. (2007b), gehen wir davon aus, dass der Versicherer die folgenden Management-Regeln verwendet: Solange das Unternehmen "ausreichend" Reserven hat, wird etwas Überschuss gezielt verteilt (resultierend in einem vorherbestimmten Gesamtzinssatz z , welcher die Summe der garantierten Zinsen und des Überschusses ist). Im Fall, dass die Reserven des Unternehmens unter eine bestimmte untere Grenze fallen, wird der Überschuss reduziert und falls die Reserven eine bestimmte Obergrenze übersteigen, wird der Überschuss erhöht. Wir bezeichnen $q(t) := \frac{R(t)}{L(t)}$ als den sogenannten Anteil am Deckungskapital. Zusätzlich bezeichnen wir mit q_l und q_u die untere bzw. obere Grenze für den Anteil am Deckungskapital. Die Überschuss-Ausschüttungspolitik wird dann durch die folgende F_t -messbare Management-Regel gegeben:

- Wenn $(1 + q_l)((1 + z)L(t - 1)) \leq A(t) \leq (1 + q_u)((1 + z)L(t - 1))$, rechnen wir den vorherbestimmten Zinssatz z der Deckungsrückstellung an (impliziert im Nachhinein $q(t) \in [q_l, q_u]$).
- Wenn $A(t) > (1 + q_u)((1 + z)L(t - 1))$ wird ein höherer Zinssatz z^* verwendet, welcher, nach der Überschussverteilung, $q(t) = q_u$ sicherstellt. Dies wird durch $z^* = \frac{A(t) - (1 + q_u)L(t - 1)}{(1 + q_u)L(t - 1)}$ erreicht.
- Wenn $A(t) < (1 + q_l)((1 + z)L(t - 1))$, verwenden wir analog den Wert z^* der, nach der Überschussverteilung, $q(t) = q_l$ garantiert: $z^* = \frac{A(t) - (1 + q_l)L(t - 1)}{(1 + q_l)L(t - 1)}$.
- Falls der gesetzliche Überschuss, wie im MUST-Fall beschrieben, den hier berechneten Überschuss übersteigt, wird der gesetzliche Überschuss verteilt.

3. Methodik

In unserem Modell sind wir in der Lage, das ("reale") Risiko, dem der Versicherer ausgesetzt ist, zu analysieren. Im Detail heißt das, für einige geeignete Risikomaße unter \mathbb{P} , können wir, für gegebene Parameter, die unterschiedlichen Auswirkungen auf unsere Vermögensportfolios analysieren (z.B. die garantierte Verzinsung oder der vorherbestimmte Zinssatz) oder untersuchen die Auswirkung verschiedener garantierter- oder vorherbestimmter Zinssätze für ein bestimmtes Vermögensportfolio. Wir können analysieren, ob und wie die Wahl des Risikomaßes sich auf die entsprechenden Ergebnisse auswirkt. Ferner kann eine risikoneutrale Bewertung (unter \mathbb{Q}) des Versicherungsvertrages durchgeführt werden. Und schließlich können beide Verfahren miteinander kombiniert werden.

In unserer Analyse verwenden wir die folgenden Risikomaße: die Wahrscheinlichkeit des Shortfalls $\mathbb{P}(A(T) < L(T))$ und der Expected Shortfall $\mathbb{E}_P \left((L(T) - A(T)) \mathbb{1}_{\{A(T) \leq L(T)\}} \right)$.

Bei der Preisbildung des Vertrags, gehen wir davon aus, dass es einige externe Dritte gibt, die (falls erforderlich) Kapital nachschießen, um mindestens die garantierte Leistung $L(T)$ am Ende der Laufzeit zu gewährleisten. Im Gegenzug erhält dieser externe Teilnehmer alle verbleibenden Mittel, d.h. $(1 - \eta) * \max\{A(T) - L(T), 0\}$. Natürlich, wenn der Vertrag, aus der Sicht des Versicherten, fair berechnet ist, ist er auch für den externen Dritten fair, d.h., bei $t = 0$ stimmt der risikoneutrale Wert dieser verbliebenen Finanzmittel mit dem Wert der Kapitalerhöhung überein (vgl. Grosen und Jørgensen, 2002). Dennoch ist eine Analyse des Ausfallsrisikos (unter dem realen Maß \mathbb{P}) im Interesse von vielen Beteiligten z.B. den Versicherungsnehmern, Aufsichtsbehörden und natürlich den externen Teilnehmern zum Zweck des Risikomanagements.

Die Kombination der versicherungsmathematischen und finanziellen Methode

Die Wahl der abschließenden Bonusbeteiligungsquote η hat offensichtlich keinen Einfluss auf das oben definierte Risiko des Versicherers. Daher könnte eine Strategie sein, für η einen Wert zu wählen, der den Vertrag fair macht, d.h. zum Zeitpunkt 0 gilt: $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{\int_0^T -r(s)ds} (L(T) + B(T)) \right) = P$.

Jedoch für die Praxis sind nur Werte für $\eta \in [0, 1]$ geeignet. Das folgende theoretische Ergebnis zeigt, unter welchen Umständen es durch η einen fairen Vertrag gibt, wenn η zwischen 0 und 1 liegt.

Behauptung. (a) Für alle Vermögensportfolios und einer beliebigen Struktur der Verbindlichkeiten (unabhängig von der abschließenden Bonuszahlung), erhalten wir einen fairen Vertrag mit einer theoretischen abschließenden Gewinnzuteilung $\eta \in (-\infty, 1]$, wenn die Bedingung,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{\int_0^T -r(s)ds} \max\{A(T) - L(T), 0\} \right) \neq 0, \text{ gilt.}$$

(b) Verwendet man einen Wert $\eta \in [0, 1]$, kann ein fairer Vertrag erhalten werden, falls der Vertrag keine Arbitrage auf den Markt einfließen lässt.

Beweis. Die "faire" abschließende Beteiligungsquote ist die Wurzel der kontinuierlichen

Funktion $F(\eta) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{\int_0^T -r(s)ds} (L(T) + \eta \max\{A(T) - L(T), 0\}) \right) - P$. Aus der obigen Bedingung

erhalten wir $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{\int_0^T -r(s)ds} \max\{A(T) - L(T), 0\} \right) > 0$ und damit $\lim_{\eta \rightarrow -\infty} F(\eta) = -\infty$. Zusätzlich erhalten wir

$$F(1) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{\int_0^T -r(s)ds} (L(T) + \max\{A(T) - L(T), 0\}) \right) - P \\ \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left(e^{\int_0^T -r(s)ds} (L(T) + A(T) - L(T)) \right) - P = 0, \text{ da } \left(e^{\int_0^t -r(s)ds} A(t) \right)_{t>0} \text{ ein } \mathbb{Q}\text{-Martingal}$$

ist. Mit dem Zwischenwertsatz wird der Beweis von Teil (a) vervollständigt.

Würde eine theoretische abschließende Bonusrate $\eta < 0$ den Vertrag fair gestalten, bedeutet dies, dass der Wert des Versicherungsvertrages zu jeder zulässigen abschließenden Bonusrate $\eta \geq 0$ die anfängliche Prämienzahlung P übersteigen und somit Arbitragemöglichkeiten mit einbeziehen würde. Wenn also der Versicherungsvertrag keine Arbitragemöglichkeiten mit einbezieht, kann, unter der obigen Bedingung, eine faire abschließende Bonusbeteiligungsquote in $[0, 1]$ gefunden werden. Dies komplettiert den Beweis des Teils (b). ■

Wir möchten anmerken, dass die Bedingung aus dem obigen Satz nur verletzt wäre, wenn $L(T) > A(T)$ $\mathbb{Q} - f. s.$, was bei unseren Rahmenbedingungen gleichbedeutend ist mit: $A(T)$ mit null Volatilität und wenn der garantierte Zins den risikofreien Zinssatz übersteigt.

In den nächsten Abschnitten werden wir die Auswirkungen einer Preisstrategie (die von diesem Ergebnis Gebrauch macht), auf die Risikolage des Versicherers, analysieren: Erstens, betroffene Parameter bestimmen - z. B. Vermögensportfolio oder vorherbestimmter Zinssatz - konsequent bei einem vorgegebenen (realen) tolerierbaren Risiko bleiben (oder so einem, dass das jeweilige Risiko minimiert wird), wobei die Ergebnisse natürlich von dem gewählten Risikomaß abhängen werden. Dann berechnet man die dazugehörige abschließende Bonusbeteiligungsquote, die den Vertrag fair macht. Falls der daraus resultierende Preis unter null ist, sollte der Vertrag nicht angeboten werden, weil es Arbitragemöglichkeiten auf den Markt bringen würde.

4. Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt haben wir die folgenden Parameter:

Zinsmodell					Aktienmarkt-Modell		Korrelation
$a(\%)$	$b(\%)$	$r(0)(\%)$	$\sigma_r(\%)$	$\lambda(\%)$	$\mu(\%)$	$\sigma_S(\%)$	$\rho(\%)$
30	4,50	1,15	2,00	-23	9	20	15

Zusätzlich besteht das Anleiheportfolio von gleichmäßig ausgewogenen Null-Coupon-Anleihen mit einer Laufzeit von $1, \dots, 10$ Jahren, was bedeutet, $x_{ij} := \frac{1}{10}, i = 1, \dots, T, j = 1, \dots, 10$. Im Folgenden untersuchen wir einen Vertrag mit einem Pauschalbetrag $P = 1000$ und einem Zeithorizont von $T = 10$ Jahren.

4.1. Punkt-zu-Punkt-Versicherung

Zunächst betrachten wir näher das Punkt-zu-Punkt-Modell, bestehend aus einem garantierten Zinssatz i und abschließender Bonusbeteiligungsquote η .

Risikoanalyse

In dem Punkt-zu-Punkt-Modell gibt es für beides, die Shortfall Wahrscheinlichkeit und dem Expected Shortfall, Lösungen in geschlossener Form.

$$\mathbb{P}(A(T) < L(T)) = \Phi\left(\frac{\ln L(T) - \mu_{A(T)}}{\sigma_{A(T)}}\right) \text{ und}$$

$$\mathbb{E}_P\left((L(T) - A(T))\mathbb{1}_{\{A(T) < L(T)\}}\right) = L(T)\mathbb{P}(A(T) < L(T)) - e^{\mu_{A(T)} + \frac{\sigma_{A(T)}^2}{2}} \Phi\left(\frac{\ln L(T) - \mu_{A(T)} - \sigma_{A(T)}^2}{\sigma_{A(T)}}\right).$$

Hier, $\mu_{A(T)} = \mathbb{E}_P(\ln A(T))$, $\sigma_{A(T)}^2 = \mathbb{V}_P(\ln A(T))$. Des weiteren bezeichnet $\Phi(\cdot)$ die kumulative Verteilungsfunktion von einer standardnormalverteilten Zufallsvariable. Da $\mu_{A(T)}$ und $\sigma_{A(T)}$ von dem Vermögensportfolio abhängen, analysieren wir zunächst, wie das Risiko von dem

Vermögensportfolio abhängt. Fig. 1 zeigt, als eine Funktion, die Shortfall Wahrscheinlichkeit des Vermögensportfolios des Versicherers für eine garantierte Verzinsung von $i = 2,25\%$, dem aktuellen garantierten Zinssatz in Deutschland.

Wie oben beschrieben, besteht das Vermögensportfolio aus einem Aktienanteil, einem Anleihenanteil und einem Kapitalmarktanteil, die aufaddiert 1 ergeben. Somit entspricht

das Vermögensportfolio in der vordersten Ecke, wo die Aktien- und Anleihenanteile 0 sind, einer reinen Geldmarktanlage. Die entsprechende Shortfall Wahrscheinlichkeit liegt bei 21 % und damit

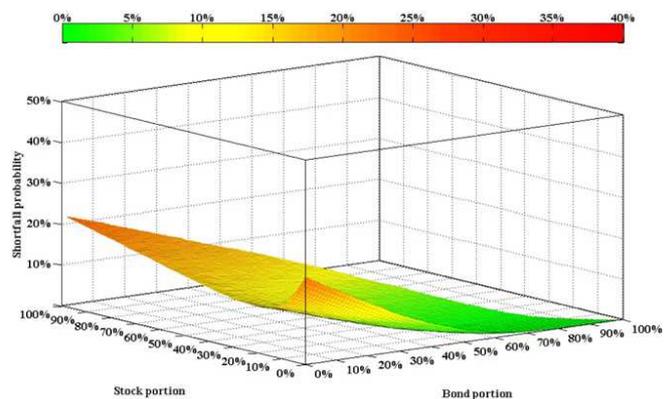


Fig. 1

fast so hoch wie die riskanteste, die erreicht wird, wenn 100 % Aktien gehalten werden (22 %). Es ist recht intuitiv, dass durch einen hohen Aktienanteil, hohe Volatilität auftritt, welche zu hohem Risiko und damit zu einer hohen Shortfall Wahrscheinlichkeit führt. Aber, dass es zu einer vollständigen Kapitalmarktanlage führt, bedarf es weiterer Erklärung: Der anfängliche kurzfristige Zinssatz ist mit 1,15 % gegeben und ist damit deutlich unter dem garantierten Zinssatz. Obwohl die langfristige Erwartung des kurzfristigen Zinssatzes 4,5 % beträgt, führt der eher kurze Zeithorizont von 10 Jahren zu der signifikanten Wahrscheinlichkeit, dass die Kapitalmarktinvestition die garantierte Rendite nicht erreicht.

Für alle fixen Anleihenanteile, nimmt die Shortfall Wahrscheinlichkeit, mit zunehmenden Aktienanteilen, zuerst ab, erreicht ein lokales Minimum zwischen 2 % und 20 % Aktien (abhängig von dem Anleihenanteil) und steigt dann durch den Aktienanteil. So zeigen unsere Ergebnisse einen klaren Diversifikationseffekt zwischen Aktien und anderen Vermögenswerten. Mit anderen Worten, das risikominimierende Portfolio ist nicht eines mit 0 % Aktien, wenn die Shortfall Wahrscheinlichkeit als Risikomaß betrachtet wird. Die kleinste Shortfall Wahrscheinlichkeit wird erreicht, wenn man 2 % in Aktien und 98 % in Anleihen investiert.

Jetzt verwenden wir den Expected Shortfall als unser Risikomaß. Fig. 2 zeigt den relativen Expected Shortfall, d.h. der Expected Shortfall als Prozentsatz der Erstprämie P . Mit dem Expected Shortfall als Risikomaß berücksichtigt man auch die Größe des Shortfalls. Somit führt, unter diesem Risikomaß, ein eher hoher Aktienanteil und somit eher hohe Volatilität zu höherem Risiko. Das höchste Risiko ist daher, durch eine reine Aktienmarkt-Investition, erreicht.

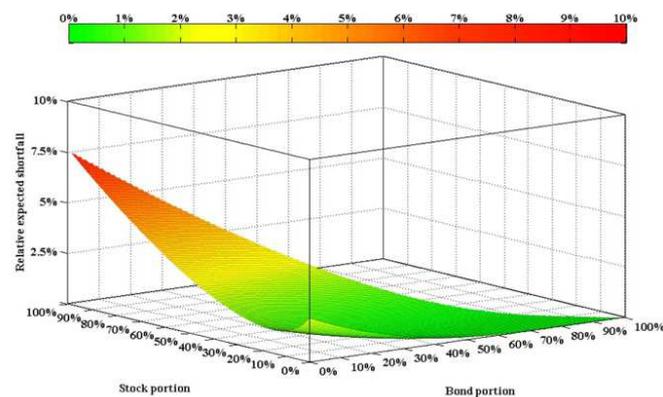


Fig. 2

Das übersteigt deutlich den Expected Shortfall in Bezug auf einer reinen Kapitalmarktanlage, obwohl die Shortfall Wahrscheinlichkeiten für die beiden Vermögensportfolios sehr ähnlich waren. Der Expected Shortfall für eine reine Kapitalmarktanlage entspricht einem 40%igen Aktien- und 60%igen Anleihenanteil.

Die risikominimierende Strategie ist unter beiden Risikomaßen sehr ähnlich. Das Risiko ist immer noch minimal für eine Investition in 2 % Aktien und 98 % Anleihen. Auch der oben beschriebene Diversifizierungseffekt kann wieder beobachtet werden: Für jeden festen Kapitalmarktanteil sind 0% Aktien nicht die risikominimierende Strategie.

Faire Verträge

Jetzt konzentrieren wir uns auf den Wert eines Vertrages aus der Sicht des Kunden. Wie im Abschnitt 3 beschrieben, nennen wir einen Vertrag fair, wenn der risikoneutrale Wert der Auszahlung der bezahlten Prämie entspricht. Fig. 3 zeigt die abschließende Beteiligungsquote, die den Vertrag fair gestaltet.

Alle erwirtschafteten Beteiligungsquoten liegen zwischen 55 % und 95 % und das bedeutet, dass alle möglichen Vermögensportfolios mit einer zulässigen abschließenden Beteiligungsquote, die den Vertrag fair macht, kombiniert werden können. Für die betrachtete Punkt-zu-Punkt-Versicherung, kann das

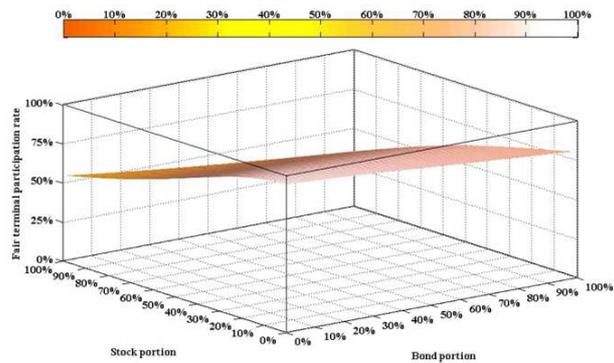


Fig. 3

Unternehmen zunächst ihre Vermögensportfolios entsprechend der Risikobedingungen ermitteln und kann dann die abschließende Beteiligungsquote bestimmen, die den Vertrag fair bewertet. Wenn die Versicherung hauptsächlich in Kapitalmarktinstrumente investiert (resultierend in einer ziemlich hohen Shortfall Wahrscheinlichkeit und einem mittleren Expected Shortfall) ist es erforderlich, eine sehr hohe abschließende Beteiligungsquote anzubieten. Im extremen Fall einer reinen Kapitalmarktanlage, entspricht die faire abschließende Beteiligungsquote 94 %, was bedeutet, ein solches Vermögensportfolio würde zur gleichen Zeit ein ziemlich hohes Risiko für die Versicherungsgesellschaft und (vor der Abschluss-Bonusbeteiligung) geringe erwartete Erträge für den Kunden, produzieren.

Für verschiedene Vermögensportfolios kann das Unternehmen erheblich geringerem Risiko begegnen und zur gleichen Zeit braucht es niedrigere abschließende Bonusbeteiligungsquoten, um den Vertrag fair zu gestalten.

Optimale Vermögensportfolios

Jetzt werden wir untersuchen, wie risikominimierende Vermögensportfolios von dem garantierten Zinssatz i abhängen. Zur Lösung des entsprechenden Optimierungsproblems, verwenden wir einen heuristischen Suchalgorithmus,

basierend auf Evolutionsstrategien (auch bekannt als Genetische Algorithmen).

Fig. 4 zeigt das Vermögensportfolio, dass die Shortfall Wahrscheinlichkeit für jede garantierte Verzinsung i minimiert sowie die entsprechende Shortfall Wahrscheinlichkeit.

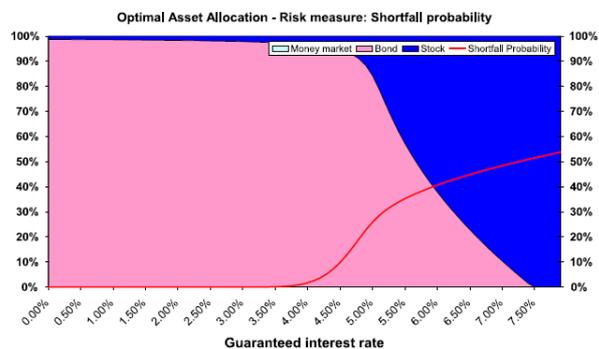


Fig. 4

Wir beobachten, dass für jede garantierte Verzinsung innerhalb des betrachteten Bereichs, das risikominimierende Portfolio nur Aktien und Anleihen enthält.

Solange die garantierte Verzinsung unter 4 % p.a. ist, ist das Ausfallsrisiko unter dem risikominimierenden Vermögensportfolio sehr gering. Selbst für eine Garantie von 4 %, ist die Shortfall Wahrscheinlichkeit unter 2 %. Natürlich steigen Shortfall Wahrscheinlichkeiten deutlich für höhere Garantien.

Während garantierten Zinsen bis zu 4 %, ist das risikominimierende Vermögensportfolio, bei einem sehr niedrigen Aktienniveau (1 % -3 %) und einem sehr hohen Anteil an Anleihen, relativ stabil, für garantierte Zinsen, die bei oder über dem langfristig erwarteten Zins (4,5 %) liegen, sind die Aktienanteile deutlich erhöht. Im extremen Fall, bei einem garantierten Zinssatz von 7,5 % oder mehr, würden 100 % Aktien zu der niedrigsten Shortfall Wahrscheinlichkeit führen.

Auf den ersten Blick scheint es irgendwie kontraintuitiv, dass die volatilste Anlagestrategie, zu dem geringsten Risiko führt. Der Grund hierfür ist jedoch offensichtlich. Wenn garantierten Zinsen sehr hoch sind (insbesondere höher als die langfristig erwarteten Zinsen), ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anleihen- oder Kapitalmarktanlagen die garantierte Verpflichtung erreichen, wesentlich kleiner als bei einer Aktienanlage. Daher ist die entsprechende Shortfall Wahrscheinlichkeit, für die Aktienanlage, niedriger.

Dies wirft die Frage auf, ob die Shortfall Wahrscheinlichkeit ein angemessenes Risikomaß ist, da sie die Menge der Ausfälle, die für volatile Aktieninvestitionen deutlich höher sein können, vernachlässigt.

Fig. 5 bietet daher die gleiche Analyse, wo der relative Expected Shortfall als Risikomaß verwendet wird.

Für garantierte Zinsen unter 4 %, unterscheiden sich die Ergebnisse nicht wesentlich von jenen von oben. Da jedoch das Risikomaß des Expected Shortfalls, mögliche hohe Zunahmen von Shortfalls berücksichtigt, ist das Maß, mit der Erhöhung des Aktienanteils, mit zunehmenden garantierten Zinssätzen, deutlich

kleiner. Risikominimierende Aktienanteile bleiben, für alle betrachteten Werte von i , unter 35 %. Dies zeigt, wie eine Risikomanagementstrategie, basierend auf Shortfall Wahrscheinlichkeiten, nur (wie zum Beispiel ein reines Value at Risk Maß), fragwürdige Anreize bieten kann.



Fig. 5

4.2. MUST-Fall

In komplexeren Gestaltungen von Gruppenversicherungen gibt es, für die entsprechenden Verteilungen, keine geschlossenen Lösungsformen. Daher müssen wir uns auf numerische Methoden verlassen, um daraus unsere Ergebnisse abzuleiten. Anhang A zeigt, dass die Verteilung von $\ln A(i+1) - \ln A(i)$ von der Realisierung von $r(i)$ abhängt und deshalb sind die Realisierungen von mehrdimensionalen normalverteilten Zufallsvariablen $(\ln A(i+1) - \ln A(i), r(i+1))_{i=0, \dots, T-1}$ für die numerische Analysen erforderlich. Wir erzeugen eine normalverteilte Stichprobe mit einer Box-Muller-Abbildung, vgl. z.B. Fishman (1996). Für jede Kombination von Parametern wurden 10.000 Monte Carlo Simulationen durchgeführt, um die Schätzung, für die Shortfall Wahrscheinlichkeit und den Expected Shortfall, zu berechnen.

Risikoanalyse

Der obere Teil der Fig. 6 zeigt die Shortfall Wahrscheinlichkeit als Funktion des Vermögensportfolios des Versicherers für eine garantierte Verzinsung von $i = 2,25\%$ und eine jährliche Überschussbeteiligung von $\delta = 90\%$ in dem MUST-Fall, d.h. jener Fall, wo nur der gesetzlich geforderte Überschuss auf dem garantierten Zinssatz oben drauf, ausgezahlt wird.

Zunächst sei darauf hingewiesen, dass, verglichen zu der Punkt-zu-Punkt-Versicherung, Shortfall Wahrscheinlichkeiten (unter sonst gleichen Bedingungen) deutlich höher sind, wenn der Überschuss auf einer laufenden Basis zur Verfügung

gestellt wird, auch wenn der Versicherer nur den Überschuss, der gesetzlich vorgeschrieben ist, anbietet. Da der Jahresüberschuss stark von Buchwerten und damit Rechnungslegungsvorschriften abhängt, ist der Einfluss des Vermögensportfolios anders als in dem Punkt-zu-Punkt-Fall.

Die Vermögensart mit dem höchsten Grad an "Freiheit in der Buchhaltung" sind Aktien. Ein Versicherer investiert 100% in Aktien und kann so eine Überschussbeteiligung aufschieben, auch wenn sich die Aktien gut entwickeln. Daher können Kapitalmarktschwankungen etwas "geglättet werden". In unserem Modell, für eine reine Buy-and-Hold-Strategie in Aktien, sind die Buchwerterträge immer 0. Dies führt zu dem speziellen Fall, wo der MUST-Fall mit der oben erwähnten Punkt-zu-Punkt-Versicherung übereinstimmt und führt somit zu einer Shortfall Wahrscheinlichkeit von 22%.

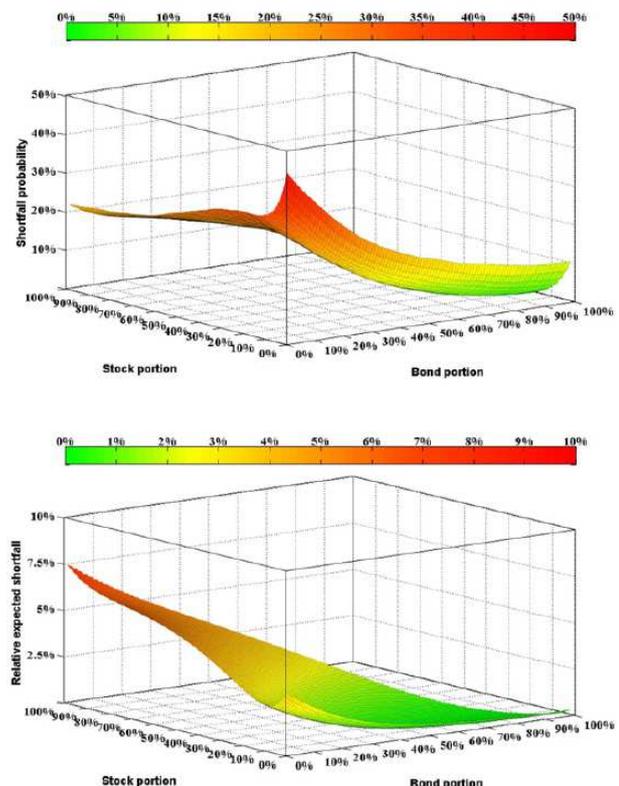


Fig. 6

Auf der anderen Seite, wenn der Versicherer 100 % in den Kapitalmarkt investiert, wo keine "Freiheit der Rechnungslegung" verfügbar ist, erreicht die Shortfall Wahrscheinlichkeit ihr Maximum bei 44 %, doppelt so hoch wie für eine reine Aktienanlage und auch zweifacher Wert des Punkt-zu-Punkt-Falls. Das risikominimierende Vermögensportfolio (was eine Shortfall Wahrscheinlichkeit von 2,17 % zur Folge hat) enthält etwas mehr Aktien als im Punkt-zu-Punkt-Fall und ist gegeben durch 90 % Anleihen und 10 % Aktien.

Der untere Teil der Fig. 6 zeigt die gleichen Ergebnisse, wenn der relative Expected Shortfall als Risikomaß verwendet wird. Die Ergebnisse dieser Maßnahme sehen ziemlich ähnlich, zu jenen aus dem Punkt-zu-Punkt-Fall, aus. Aus dem oben erläuterten Grund stimmen für einen Aktienanteil von 100% der MUST- und der Punkt-zu-Punkt-Fall überein. Außerdem stellt sich heraus, dass 100 % Aktien, im Rahmen dieses Risikomaßes, das riskanteste Vermögensportfolio ist.

Für eine 100%ige Kapitalmarktinvestition erhöht sich der Expected Shortfall verglichen gegenüber dem Punkt-zu-Punkt-Fall, um 60 %, ist aber immer noch nicht so riskant wie die reine Aktienanlage. Die risikominimierende Strategie ist jener sehr ähnlich, die erreicht wird, wenn die Shortfall Wahrscheinlichkeit als Risikomaß verwendet wird, nämlich ca. 10 % Aktien und 90 % Anleihen.

Faire Verträge

Ähnlich wie bei dem Punkt-zu-Punkt-Fall zeigt die Fig. 7 die abschließende Beteiligungsquoten, die den Vertrag fair machen.

Alle Beteiligungsquoten liegen zwischen 20% und 63 % und sind im Grunde alle niedriger als in dem Punkt-zu-Punkt-Fall. Das bedeutet auf der einen Seite, dass alle möglichen Vermögensportfolios mit einer zulässigen abschließenden

Beteiligungsquote, die den Vertrag fair

macht, kombiniert werden können und auf der anderen Seite bestätigt es, dass laufende Überschüsse im MUST-Fall einige Kundenwerte (=der Wert den Endkunden eines Produktes oder einer Dienstleistung erhalten) erzeugt, die durch geringere abschließende Beteiligungsquoten ausgeglichen werden sollten, um allen Kunden den gleichen Wert zur Verfügung zu stellen.

Während eine vollständige Investition in den Kapitalmarkt die höchste abschließende Beteiligungsquote im Punkt-zu-Punkt-Modell benötigt, erzeugt jetzt ein Portfolio, bestehend aus 30% Anleihen, 8 % Aktien und 62 % Kapitalmarkt - unter sonst gleichen Bedingungen - den niedrigsten Vertragswert vor dem Abschluss-Überschuss und benötigt daher eine hohe Beteiligungsquote, um den Vertrag fair zu machen. Im Gegensatz dazu, ergibt das risikominimierende Vermögensportfolio, d.h. 90 % Anleihen und 10 % Aktien, einen recht hohen abschließenden Überschussanteil.

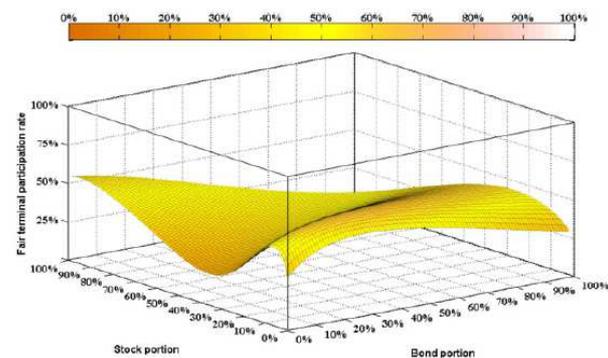


Fig. 7

Optimale Vermögensportfolios

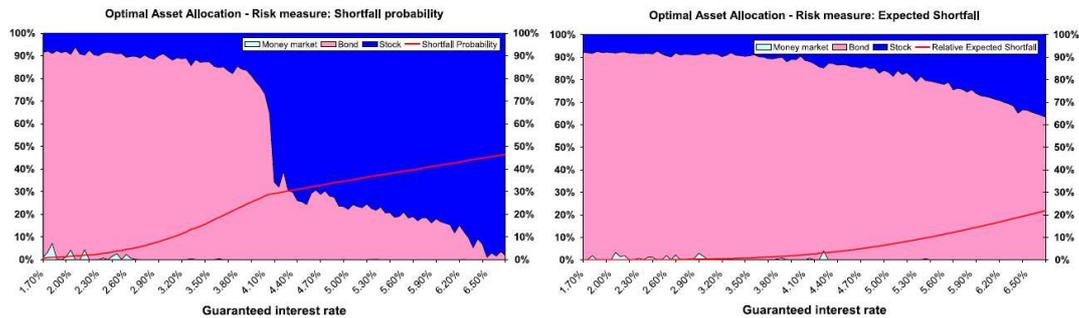


Fig. 8

Der linke Teil der Fig. 8 zeigt das risikominimierende Vermögensportfolio als Funktion der garantierten Verzinsung, wenn die Shortfall Wahrscheinlichkeit als Risikomaß verwendet wird. Zunächst beobachten wir, dass die Ergebnisse weniger glatt aussehen, wenn sie mit den ähnlichen Ergebnissen vom Punkt-zu-Punkt-Modell verglichen werden (vgl. Fig. 4 und 5). Dies liegt an der Volatilität der Monte-Carlo-Schätzung sowie an dem heuristischen Suchalgorithmus. Durch Erhöhen der Rechenzeit, konnte jede gewünschte Genauigkeit erreicht werden.

Für eher niedrige garantierte Zinssätze, besteht das optimale Vermögensportfolio - ähnlich wie bei dem Punkt-zu-Punkt-Modell - vor allem aus Anleihen und einem ziemlich kleinen Aktienrisiko. Während jedoch der Versicherer grundsätzlich in der Lage ist, die Shortfall Wahrscheinlichkeit, gemäß der risikominimierenden Strategie vom vorherigen Abschnitt, zu beseitigen, sind hier, selbst für niedrige garantierte Zinssätze, noch einige Shortfall Wahrscheinlichkeiten vorhanden. Das zeigt das zusätzliche Risiko, welches Gruppenversicherungen hervorrufen.

Sobald der garantierte Zinssatz größer ist als 4 % p.a., steigt der Aktienanteil des risikominimierenden Portfolios stark an. Ähnlich dem Punkt-zu-Punkt-Modell, können Anleihen und der Kapitalmarkt keine ausreichenden Erträge erbringen, um mit der relativ hohen garantierten Rate übereinzustimmen und somit ist ein riskanteres Portfolio notwendig, um die Shortfall Wahrscheinlichkeit zu minimieren. Für extrem hohe garantierte Zinsen besteht das risikominimierende Portfolio ausschließlich aus Aktien, was dann überhaupt keine regelmäßige Überschussbeteiligung zur Folge hat (denn für 100 % Aktien stimmen das Punkt-zu-Punkt-Modell und der MUST-Fall überein).

Jedoch ist zu beachten, dass die Shortfall Wahrscheinlichkeit die Höhe des Ausfalls vernachlässigt. Daher werden ähnliche Analysen, unter der Verwendung des Expected Shortfalls als vorherbestimmtes Risikomaß, im rechten Teil der Fig. 8 gezeigt.

Für garantierte Zinssätze unter 4 % p.a. sind sich die risikominimierenden Vermögensportfolios, unter beiden Risikomaßen sehr ähnlich. Doch für garantierte Zinsen, die über dem langfristigen durchschnittlichen Zinssatz liegen, steigt der Aktienanteil des risikominimierenden Vermögensportfolios, wenn der Expected Shortfall als Risikomaß verwendet wird und aus den gleichen Gründen, die bereits im Punkt-zu-Punkt-Modell erläutert worden sind, deutlich langsamer.

4.3. IS-Fall

Schließlich zeigen wir, wie im Abschnitt 2.4 beschrieben, die Ergebnisse für den IS-Fall. Für die folgenden Berechnungen haben wir, einen vorherbestimmten Zinssatz von $z = 4,5\%$ und eine untere bzw. obere Grenze für den Anteil am Deckungskapital von $q_l = 5\%$ und $q_u = 30\%$, vorausgesetzt. Diese Parameter bedeuten, dass die Versicherungsgesellschaft den Überschuss stabil bei $4,5\%$ halten wird, solange die Reserven zwischen 5% und 30% bleibt.

Risikoanalyse

Wie oben erwähnt, beginnen wir mit der Erhebung des Gefährdungspotenzials der Versicherungsgesellschaft, die von den unterschiedlichen Vermögensportfolios ausgehen, die die Shortfall Wahrscheinlichkeit als relevantes Risikomaß verwenden (linker Teil der Fig. 9).

Es ist erwähnenswert, verglichen mit dem MUST-Fall, dass sich die Shortfall Wahrscheinlichkeiten, für Vermögensportfolios mit niedrigen Aktienanteilen, nicht signifikant erhöhen. Dies ist einmal mehr auf die Buchhaltungsrichtlinien zurückzuführen, die bereits im MUST-Fall den Versicherer zwingen, erhebliche Überschussbeteiligungen zur Verfügung zu stellen. Folglich ist die risikominimierende Strategie (was zu einer Shortfall Wahrscheinlichkeit von $3,21\%$ führt) nur leicht verändert, nämlich auf 91% Anleihen und 9% Aktien.

Im Gegensatz zu Vermögensportfolios mit hohen Aktienanteilen, für die potenziell eher volatile Rückstellungen angelegt werden, ist das Risiko des Versicherers unter dem IS-Fall enorm erhöht. Die Vergabe eines größeren Teils der Rücklagen sind dann gesetzlich vorgeschrieben, wenn sich die Aktienmärkte gut entwickeln, kann aber hinterher die Zahlungsfähigkeit der Versicherung gefährden, da ebenfalls der garantierte Zinssatz auf die Vorjahres-Überschüsse gutgeschrieben werden muss. Infolgedessen, desto höher das Aktien Verhältnis ist, desto weniger großzügig, als gesetzlich vorgeschrieben, sollte der Versicherer bei der Vergabe regelmäßiger Überschüsse sein. Dies bestätigen Forschungsergebnisse von Kling et al. (2007b), die erklären, dass unter Gruppenversicherungen hohe Aktienanteile nicht aufrechtzuerhalten sind.

Außerdem befassen wir uns ein weiteres Mal mit der Risikosituation des Unternehmens, wenn sie den Expected Shortfall verwendet (rechter Teil der Fig. 9). Unter beiden Risikomaßen steigt das Risiko bei kompletter Investition in Aktien, wenn es mit dem MUST-Fall verglichen wird (ähnlich wie der

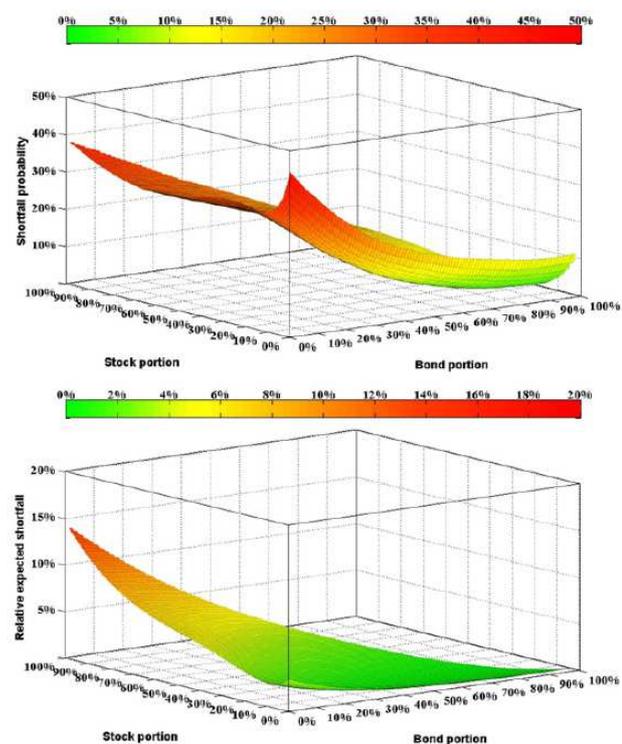


Fig. 9

MUST-Fall). Interessanterweise verschwindet im IS-Fall, sogar nahezu das Risiko, wenn die Versicherungsgesellschaft hohe Anleihsanteile und niedrige Aktienkapitalsanteile besitzt. Die risikominimierende Strategie ist einmal mehr durch ungefähr 90 % Anleihen und 10 % Aktien gegeben.

Während unter der Shortfall Wahrscheinlichkeit, 100 % auf dem Kapitalmarkt gleichermaßen riskant ist wie 100 % Aktien, wird unter dem Expected Shortfall als Risikomaß eindeutig identifiziert, dass eine komplette Investitionen in Aktien das riskanteste Vermögensportfolio ist. Diese Ergebnisse sind sehr ähnlich zu denen die bei der Punkt-zu-Punkt-Versicherung oder dem MUST-Fall beobachtet wurden.

Fairer Vertrag

Ähnlich wie bei den vorherigen Analysen zeigt die Fig. 10 die abschließenden Beteiligungsquoten, die die betrachteten Verträge fair gestalten.

Da die laufende Überschussbeteiligung in dem IS-Fall schon sehr wertvoll ist, bleiben, bei allen Vermögensportfolios, die abschließenden Beteiligungsquoten unter 60 %. Weiters gibt es in dem IS-Fall Vermögensportfolios, für die nur

eine negative abschließende Beteiligungsrate den Vertrag fairer machen würde. Dies bedeutet, dass der Wert des Vertrages, ohne abschließenden Bonus, ohnehin die bezahlte Einmalprämie übersteigt. Diese Parametereinstellungen würden daher Arbitrage-Möglichkeiten auf dem Markt hervorbringen und sollte daher nicht angeboten werden. Die jeweiligen Vermögensportfolios sind in der Fig. 10 rot gefärbt und zeichnen sich durch relativ hohe Aktienanteile aus. Weil der Expected Shortfall als Risikomaß diese Anteile als besonders riskant identifiziert, führen beide Ansätze, der versicherungsmathematische und der finanzielle, in diesem Fall, zu ähnlichen Entscheidungen des Managements.

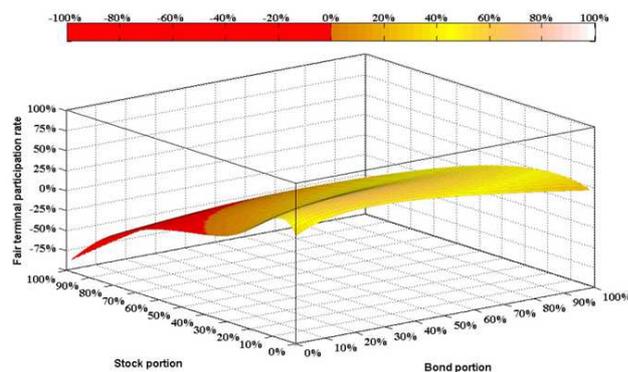


Fig. 10

Optimale Vermögensportfolios

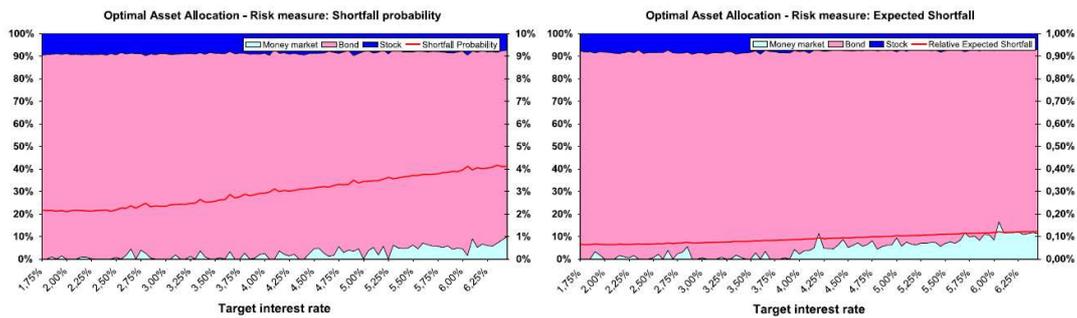


Fig. 11

Schließlich untersuchen wir die optimalen Vermögensportfolios innerhalb des IS-Falls. Doch zu diesem Zeitpunkt konzentrieren wir uns auf die Auswirkungen der Änderung des vorherbestimmten Zinssatzes (im Gegensatz zu dem Garantierten). Fig. 11 zeigt das risikominimierende Vermögensportfolio als Funktion des vorherbestimmten Zinssatzes für, einen garantierten Zinssatz $i = 2,25\%$, eine untere Rückstellungsgrenze $q_l = 5\%$ und eine obere Rückstellungsgrenze $q_u = 30\%$ und unter der Verwendung der Shortfall Wahrscheinlichkeit bzw. dem Expected Shortfall. Zunächst stellen wir fest, dass - im Vergleich zu den bisherigen Ergebnissen - die unterschiedlichen Risikomaße wiederum sehr ähnliche optimale Vermögensportfolios ergeben. Die Shortfall Wahrscheinlichkeit steigt nur leicht im vorherbestimmten Zinssatz. Daher, verglichen mit den obigen Ergebnissen, wird der garantierte Zins (und nicht der vorherbestimmte Zinssatz) in unseren berücksichtigten Haftungsmodellen, als der größte Risikotreiber identifiziert. Für den gewählten garantierten Zinssatz von 2,25 %, kann das Risiko grundsätzlich vermieden werden, unabhängig von dem vorherbestimmten Zinssatz. Der relative Expected Shortfall bleibt fast konstant um 0,2 %. Dies zeigt, dass - wenn geeignete Vermögensportfolios gewählt werden - der vorherbestimmte Zinssatz, praktisch keine Auswirkungen auf das Risiko hat. Allerdings ändert sich das risikominimierende Vermögensportfolio mit einem geänderten vorherbestimmten Zinssatz: Mit zunehmendem vorherbestimmten Zinssatz, bleibt der Aktienanteil stabil bei etwa 10 %, der Anleihenanteil nimmt leicht ab und der Kapitalmarktanteil steigt auf 10 %.

5. Fazit und Ausblick

In diesem Artikel haben wir drei verschiedene Arten von gewinnbeteiligten Lebensversicherungsverträgen analysiert. Das theoretische Ergebnis aus Abschnitt 3 zeigt, dass, außer wenn die Vertragsgestaltung Arbitrage auf den Markt mit einbezieht, es immer möglich ist, versicherungsmathematische und finanzielle Ansätze zu kombinieren, so dass gleichzeitig die Verwaltung der Risiken des Versicherers und ein gewünschter Preis für den Vertrag erreicht werden kann. In unseren numerischen Analysen fanden wir sowohl, dass optimale, d.h. risikominimierende Vermögensportfolio heraus, als auch, dass die Höhe des Risikos stark von den gewählten Haftungsmodellen abhängt (d.h. Mechanismus für die Überschussbeteiligung). Auch hängen die Ergebnisse sehr stark von dem gewählten Risikomaß ab. Unsere Ergebnisse zeigen, dass die Verwendung der Shortfall Wahrscheinlichkeit als alleiniges Risikomaß, unter vielen Umständen, zu falschen Anreizen führen kann. Dies sollte sowohl für die Praktizierenden als auch die Aufsichtsbehörden bei der Umsetzung der Value at Risk-basierenden Regulierung, interessant sein. Natürlich können und sollten unsere Modelle und Analysen in zukünftigen Forschungsarbeiten verfeinert werden. Es würde sich besonders lohnen, Management Regeln (mit-)einzuschließen, die pfadabhängige Vermögensportfolio-Strategien ermöglichen. Auch wäre die Frage, wie ein optimales Anleihen-Portfolio unter einem gegebenem Haftungsmodell aussehen würde, von großem Interesse. Schließlich könnte das Modell realistischer gestaltet werden, indem Rückkauf und Sterblichkeit berücksichtigt und mehrere Versicherungsverträge aus der Bilanz des Versicherers in Betracht gezogen werden.

$$\begin{aligned}
\ln A(i+1) - \ln A(i) &= \int_i^{i+1} d \ln A(t) \\
&= \int_i^{i+1} \left(x_\beta r(t) + x_S \mu + \underbrace{\sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} x_B (r(t) - \lambda \sigma_r B(t, i+j))}_{(I_i)} \right) dt + \underbrace{\int_i^{i+1} x_S \sigma_S dW_3(t)}_{(II_i)} \\
&\quad - \underbrace{\int_i^{i+1} \left(\sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} x_B \sigma_r B(t, i+j) \right) dW_1(t)}_{(III_i)} \\
&\quad - \underbrace{\frac{1}{2} \left(\left(\sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} x_B \sigma_r B(t, i+j) \right)^2 - 2x_S x_B \rho \sigma_S \sigma_r \sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} B(t, j+1) + (x_S \sigma_S)^2 \right)}_{(IV_i)} dt.
\end{aligned}$$

Box I.

Anhang A. Der Beweis, dass der Anlagenbestand des Versicherers einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt

Wir werden nun beweisen, dass unter den Annahmen von Abschnitt 2.3 der Anlagenbestand des Versicherers einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. In Anhang B, werden wir weitere Berechnungen von $\mu_{A(t)} = \mathbb{E}_P \ln A(t)$ und $\sigma_{A(t)}^2 = \mathbb{V}_P \ln A(t)$ für $t \in \{1, \dots, T\}$ kurz skizzieren. Aufgrund der selbstfinanzierenden Eigenschaft können die Dynamiken des Anlagenbestands des Versicherers geschrieben werden als $dA(t) = c_\beta(t) d\beta(t) + c_S(t) dS(t) + \sum_{j=1}^{T^*} c_{ij}(t) dp(t, i+j)$ zum Zeitpunkt $t \in [i, i+1)$. Daher

$$\begin{aligned}
dA(t) &= c_\beta(t) \beta(t) dr(t) + c_S(t) S(t) (\mu dt + \sigma_S dW_3(t)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{T^*} c_{ij}(t) dp(t, i+j) \\
&= c_\beta(t) \beta(t) dr(t) + c_S(t) S(t) (\mu dt + \sigma_S dW_3(t)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{T^*} c_{ij}(t) p(t, T) \left((r(t) - \lambda \sigma_r B(t, T)) dt - \sigma_r B(t, T) dW_1(t) \right)
\end{aligned}$$

das ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{dA(t)}{A(t)} &= x_\beta r(t) dt + x_S (\mu dt + \sigma_S dW_3(t)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} x_B \left((r(t) - \lambda \sigma_r B(t, i+j)) dt - \sigma_r B(t, i+j) dW_1(t) \right).
\end{aligned}$$

Anwenden der Itô-Formel für mehrere Prozesse gibt dann

$$\begin{aligned}
d \ln A(t) &= x_\beta r(t) dt + x_S (\mu dt + \sigma_S dW_3(t)) \\
&+ \sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} x_B \left((r(t) - \lambda \sigma_r B(t, i + j)) dt - \sigma_r B(t, i + j) dW_1(t) \right) \\
&- \frac{1}{2} \left(\left(\sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} x_B \sigma_r B(t, i + j) \right)^2 - 2 x_S x_B \rho \sigma_S \sigma_r \sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} B(t, j + i) + (x_S \sigma_S)^2 \right) dt
\end{aligned}$$

was bedeutet $\ln A(i + 1) - \ln A(i) = (I_i) + (II_i) + (III_i) + (IV_i)$, wie in [Box I](#) enthalten.

Hier, ist (I_i) ein normal verteiltes Integral, da $r(t)$ normal verteilt ist und sich das Integral zu einem Grenzwert von Riemannschen Summen entwickelt. (II_i) und (III_i) sind Standard stochastische Integrale bezüglich einer Brownschen Bewegung und mit deterministischen Koeffizienten und daher ebenfalls normal verteilt. Da (IV_i) deterministisch ist, folgt $\ln A(i + 1) - \ln A(i)$ einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ_i und Varianz σ_i^2 . Daher folgt daraus (da wir $x_{ij} \in F_0$ vorausgesetzt haben), dass $\ln A(T) - \ln A(0) = \sum_{i=1}^T \ln A(i) - \ln A(i - 1)$ normalverteilt ist und auch den Beweis vervollständigt.

Anhang B. Berechnung der Momente von $\ln A(t)$

Wir skizzieren nun kurz die Berechnung des Erwartungswertes $\mu_{A(t)}$ und der Varianz $\sigma_{A(t)}^2$ von $\ln A(t)$ für $t \in \{1, \dots, T\}$. Für den Erwartungswert und die Varianz von (I_i) , die oben definiert sind, erhält man

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_P(I_i) &= \int_i^{i+1} \left(x_S \mu + \sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} x_B (r(t) - \lambda \sigma_r B(t, i + j)) \right) dt + \mathbb{E}_P \left(\int_i^{i+1} (x_\beta r(t)) dt \right) \\
&= \int_i^{i+1} \left(x_S \mu + \sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} x_B (r(t) - \lambda \sigma_r B(t, i + j)) \right) dt \\
&+ \mathbb{E}_P \left(x_\beta \int_i^{i+1} \left(e^{-at} r(0) + b(1 - e^{-at}) + \int_0^t \sigma_r e^{-a(t-u)} dW_1(u) \right) dt \right) \\
&= \int_i^{i+1} \left(x_S \mu + \sum_{j=1}^{T^*} x_{ij} x_B (r(t) - \lambda \sigma_r B(t, i + j)) \right) dt \\
&+ x_\beta \int_i^{i+1} (e^{-at} r(0) + b(1 - e^{-at})) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_P(I_i) &= \mathbb{V}_P \left(x_\beta \int_i^{i+1} \left(\int_0^t \sigma_r e^{-a(t-u)} dW_1(u) \right) dt \right) = x_\beta^2 \mathbb{E}_P \left(\int_i^{i+1} \left(\int_0^t \sigma_r e^{-a(t-u)} dW_1(u) \right) dt \right)^2 \\
&= x_\beta^2 \int_i^{i+1} \int_i^{i+1} \mathbb{E}_P \left(\sigma_r e^{-at} \left(\int_0^t e^{au} dW_1(u) \right) \sigma_r e^{-as} \left(\int_0^s e^{au} dW_1(u) \right) \right) dt ds \\
&= x_\beta^2 \int_i^{i+1} \int_i^{i+1} \sigma_r e^{-a(t+s)} \mathbb{E}_P \left(\left(\int_0^{\min[s,t]} e^{au} dW_1(u) \right)^2 \right) dt ds \\
&= x_\beta^2 \int_i^{i+1} \int_i^{i+1} \sigma_r e^{-a(t+s)} \left(\int_0^{\min[s,t]} e^{2au} du \right) dt ds.
\end{aligned}$$

Die Kovarianz von (I_i, III_i) ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}_P(I_i, III_i) &= \mathbf{Cov}_P \left(x_\beta \int_i^{i+1} \left(\int_0^t \sigma_r e^{-a(t-u)} dW_1(u) \right) dt, \int_i^{i+1} x_S \sigma_S dW_3(u) \right) \\
&= x_\beta \sigma_r x_S \sigma_S \int_i^{i+1} \mathbf{Cov}_P \left(\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_1(u), \int_i^{i+1} dW_3(u) \right) dt \\
&= x_\beta \sigma_r x_S \sigma_S \int_i^{i+1} \mathbf{Cov}_P \left(\int_i^t e^{-a(t-u)} dW_1(u), \int_i^t dW_3(u) \right) dt \\
&= x_\beta \sigma_r x_S \sigma_S \int_i^{i+1} \left(\rho \int_i^t e^{-a(t-u)} du \right) dt.
\end{aligned}$$

Nach einigen langwierigen Berechnungen der Erwartungswerte und der Kovarianzmatrix von $((I_i), (II_i), (III_i), (IV_i))$, die im Wesentlichen demselben Muster folgen, kann man eine ähnliche geschlossene Lösungsform für $\mu_{A(t)}$ und $\sigma_{A(t)}^2$ erreichen, nämlich $\mu_{A(t)} = \sum_{i=1}^t \mu_i + \ln A(0)$, $\sigma_{A(t)}^2 = \sum_{i=1}^t \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j}^t \mathbf{Cov}_P((\ln A(i) - \ln A(i-1)), (\ln A(j) - \ln A(j-1)))$.

Quellenangaben

- Barbarin, J., Devolder, P., 2005. Risk measure and fair valuation of an investment guarantee in life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics* 37 (2), 297–323.
- Bauer, D., Kiesel, R., Kling, A., Russ, J., 2006. Risk-neutral valuation of participating life insurance contracts. *Insurance: Mathematics and Economics* 39 (2), 171–183.
- Björk, T., 2005. *Arbitrage Theory in Continuous Time*. Oxford University Press.
- Black, F., Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy* 81 (3), 637–654.
- Bryis, E., de Varenne, F., 1997. On the risk of insurance liabilities: debunking some pitfalls. *Journal of Risk and Insurance* 64 (4), 637–694.
- Fishman, G., 1996. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer.
- Gatzert, N., 2008. Asset management and surplus distribution strategies in life insurance: an examination with respect to risk pricing and risk measurement. *Insurance: Mathematics and Economics* 42 (2), 839–849.
- Gatzert, N., Kling, A., 2007. Analysis of participating life insurance contracts: a unification approach. *Journal of Risk and Insurance* 74 (3), 547–570.
- GDV 2007. *Statistisches Taschenbuch der Versicherungswirtschaft*. Technical Report of the Association of German Insurers.
- Graf, S., 2008. *A Combined Approach to Risk Analysis and Valuation of Life Insurance Contracts*. Ifa-Verlag Ulm.
- Grosen, A., Jørgensen, P.L., 2000. Fair valuation of life insurance liabilities: the impact of guarantees, surrender options and bonus policies. *Insurance: Mathematics and Economics* 26, 37–57.
- Grosen, A., Jørgensen, P.L., 2002. Life insurance liabilities at market value: an analysis of insolvency risk, bonus policy and regulatory invention rules in a barrier option framework. *Journal of Risk and Insurance* 69, 63–91.
- Kling, A., 2007. *Modellierung, Bewertung und Risikoanalyse von Zinsgarantien in Konventionellen Deutschen Lebensversicherungsverträgen*. Ifa-Verlag Ulm.
- Kling, A., Richter, A., Russ, J., 2007a. The impact of surplus distribution on the risk exposure of with profit life insurance policies including interest rate guarantees. *Journal of Risk and Insurance* 74 (3), 571–589.
- Kling, A., Richter, A., Russ, J., 2007b. The interaction of guarantees, surplus distribution, and asset allocation in with profit life insurance policies. *Insurance: Mathematics and Economics* 40 (1), 164–178.
- Rechenberg, I., 1994. *Evolutionsstrategie '94*. Fromann-Holzboog, Stuttgart.
- Shreve, S., 2004. *Stochastic Calculus for Finance*, vol. 2. Springer.
- Sørensen, M., 1997. Estimating functions for discretely observed diffusions: a review. In: *Selected Proceedings of the Symposium on Estimating Functions*. In: *IMS Lecture Notes-Monograph Series*, 32. pp. 305–325.
- Vasicek, O.A., 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics* 5 (2), 177–188.