Spieltheorie in der Ökonomie

Kevin Klein

Technische Universität Wien

19. Dezemberl 2012

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Spieltheorie ist ein Teilgebiet der Wirtschaftsmathematik. Sie befasst sich mit der Modellierung und Lösung sozialer Interaktionen. Anders als bei der Entscheidungstheorie hängt bei der Spieltheorie die Entscheidung nicht nur von der eigenen Entscheidung, sondern auch von denen der anderen Beteligten ab.

Darstellungsformen

- Normalform
- Extensivform
- Kooperative Form

Grundlagen

- Spieler $i = 1 \dots n$
- S_i (stetig oder diskret) sei die Strategiemenge des Spielers i
- $s_i \in S_i$ ist die Strategie für das gesamte Spiel

Grundlagen

- Spieler $i = 1 \dots n$
- S_i (stetig oder diskret) sei die Strategiemenge des Spielers i
- $s_i \in S_i$ ist die Strategie für das gesamte Spiel

Notation:

- $S = S_1 \times \dots S_n$
- $S_{-i} = S_1 \times \dots S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots S_n$
  $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots s_n) \in S_{-i}$ ist der Strategievektor der Spieler ausgenommen i

Präferenzen

Sei $X = X(s_i, s_{-i})$ das Ergebnis eines Spiels. Jeder Spieler wird das Ergebnis dieses Spieles subjektiv bewerten, da jeder Spieler andere Präferenzen hat. Dies wirkt sich auch auf den individuellen Nutzen des Spielers aus. Wenn Spieler i Ergebnis X gegenüber Ergebnis Y präferiert hat das Ergebnis von X für den Spieler natürlich auch einen höheren Nutzen.

Nutzenfunktion

- Wir definieren die Auszahlungsfunktion $u_i : S \to \mathbb{R}$.
- Das Ergebnis $u_i(s_i, s_{-i})$ wird vom Spieler i gemäß seiner Präferenzen bewertet werden.

Matrixdarstellung

		Spieler A	
		a_1	a_2
B	b_1	$(u_B(b_1, a_1), (u_A(b_1, a_1))$	$(u_B(b_1, a_2), (u_A(b_1, a_2))$
	b_2	$(u_B(b_2, a_1), (u_A(b_2, a_1))$	$(u_B(b_2, a_2), (u_A(b_2, a_2))$

Dominanzen

- Strenge Dominanz

Eine Strategie s_i wird von einer Strategie $s_i^{'}$ streng dominiert, wenn

$$u_i(s_i^{'}, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Dominanzen

- Strenge Dominanz

Eine Strategie s_i wird von einer Strategie $s_i^{'}$ streng dominiert, wenn

$$u_i(s_i^{'}, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

- Schwache Dominanz

Eine Strategie s_i wird von einer Strategie $s_i^{'}$ schwach dominiert, wenn

$$u_i(s_i^{'}, s_{-i}) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}) \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

und $\quad u_i(s_i^{'}, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$ für mindestens ein $\quad s_{-i} \in S_{-i}$

Beste Antwort Abbildung

Da angenommen wird, dass jeder Spieler **rational** denkt, wird angenommen, dass jeder Spieler versuchen wird seine Auszahlung bezüglich seiner Erwartungen der Strategie der anderen Spieler zu maximieren.

Beste Antwort Abbildung

Da angenommen wird, dass jeder Spieler **rational** denkt, wird angenommen, dass jeder Spieler versuchen wird seine Auszahlung bezüglich seiner Erwartungen der Strategie der anderen Spieler zu maximieren.

- Beste Antwort Abbildung

$s_i^* \in f_i(s_{-i})$, wobei f die auszahlungsmaxierende Funktion für den Spieler i ist. Falls $s_i^* = f_i(s_{-i})$, also s_i^* eindeutig, so spricht man von der besten Antwort Funktion, sonst von der besten Antwort Korrespondenz.

Nash-Gleichgewicht

Aus vorherigen Überlegungen folgen wir folgendes

1. Die Strategie jedes Spielers wird im obigen Sinne gewählt werden
2. Jeder Spieler erwartet, dass die anderen Spieler auch versuchen werden, ihre Auszahlung gemäß ihrer Erwartungen der Strategien der anderen Spieler zu maximieren.

Nash-Gleichgewicht

Aus vorherigen Überlegungen folgen wir folgendes

1. Die Strategie jedes Spielers wird im obigen Sinne gewählt werden
2. Jeder Spieler erwartet, dass die anderen Spieler auch versuchen werden, ihre Auszahlung gemäß ihrer Erwartungen der Strategien der anderen Spieler zu maximieren.

Nash-Gleichgewicht

Ein Strategievektor (s_i^*, s_{-i}^*) wird Nash Gleichgewicht genannt, falls kein Spieler den Anreiz hat, als einziger von seiner Strategie abzuweichen, d.h.

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \forall s_i \in S_i$$

Beispiel

		A		
		a_1	a_2	a_3
B	b_1	$(0,5)$	$(4,4)$	$(0,4)$
	b_2	$(0,3)$	$(3,3)$	$(1,2)$
	b_3	$(1,4)$	$(4,2)$	$(1,2)$

Grundlegendes

- Das gesamte vorhandene Wissen ist gemeinsames Wissen, d.h. alle Spieler haben dasselbe Wissen (Nutzen, Strategiemengen).
- Die Entscheidung für eine Strategie, wird von allen Spielern gleichzeitig getroffen

Spielbeschreibung

- Zwei Anbieter $i = 1, 2$ (Duopol)
- *Homogene* Güter: einheitlicher Preis.
  Preis-Absatz-Funktion ist gegeben durch

$$p(x) = \begin{cases} a - x & \text{falls } x = x_1 + x_2 \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die Anbieter verwenden die *Menge* als Strategievariable:
  $s_i = x_i \in \mathbb{R}_0^+ = S_i, i = 1, 2$
- Konstante identische Grenzkosten: $K_i(x_i) = cx_i, i = 1, 2$

Die *Auszahlungen* entsprechen der Gewinnfunktion:

$$
\begin{aligned}
u_i(x_i, x_j) = G_i(x_i, x_j) &= p(x)x_i - K_i(x_i), \qquad j \neq i \\
&= (a - x_i - x_j)x_i - cx_i \\
&= ax_i - x_i^2 - x_i x_j - cx_i
\end{aligned}
$$

Die *Beste-Antwort-Funktion* (Reaktionsfunktion) ergibt sich durch Maximierung:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G_i}{\partial x_i} &= a - c - 2x_i - x_j = 0 \qquad \text{(BEO)} \\
\Rightarrow \quad x_i^* &= \frac{a - c - x_j}{2} = R_i(x_j) \\
\Rightarrow \quad x_j^* &= \frac{a - c - x_i}{2} = R_j(x_i) \quad \text{(aus Symmetriegründen)}
\end{aligned}
$$

Nash - Gleichgewicht

Auflösen von $x_1 = R_1(x_2)$ nach x_2 und Gleichsetzen mit $x_2 = R_2(x_1)$ ergibt:

$$\begin{aligned} a - c - 2x_1 \quad (= x_2) &= \frac{a - c - x_1}{2} \\ 2a - 2c - 4x_1 &= a - c - x_1 \\ a - c &= 3x_1 \\ x_1^* &= \frac{a-c}{3} = x_2^* \quad \text{(aus Symmetriegründen)} \end{aligned}$$

Alternativ kann auch $R_i(x_j)$ in $R_j(x_i)$ eingesetzt und nach x_j aufgelöst werden.

Die Cournot-Nash-Lösung lautet somit

$$\left(\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3}\right)$$

- Zwei Anbieter $i = 1, 2$ (Duopol)
- *Heterogene* substitutive Güter: Nachfragefunktionen gegeben durch

$$x_i(p_i, p_j) = \begin{cases} a - p_i + bp_j & \text{falls } p_i < a + bp_j \quad (0 < b < 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Die Anbieter verwenden den *Preis* als Strategievariable: $s_i = p_i \in \mathbb{R}_0^+ = S_i, i = 1, 2$
- Konstante identische Grenzkosten: $K_i(x_i) = cx_i, i = 1, 2$

$$
\begin{aligned}
G_i(p_i, p_j) &= x_i(p_i, p_j)(p_i - c) \\
&= (a - p_i + bp_j)(p_i - c) \\
&= ap_i - p_i^2 + bp_j p_i - ca + cp_i - cbp_j
\end{aligned}
$$

Maximierung ergibt

$$
\begin{aligned}
& & \frac{\partial G_i}{\partial p_i} &= a + c - 2p_i + bp_j = 0 \quad \text{(BEO)} \\
\Rightarrow & \quad & p_i^* = R_i(p_j) &= \frac{a + c + bp_j}{2} \\
\Rightarrow & \quad & p_j^* = R_j(p_i) &= \frac{a + c + bp_i}{2} \quad \text{(aus Symmetriegründen)}
\end{aligned}
$$

Auflösen von $p_2 = R_2(p_1)$ nach p_1 und Gleichsetzen mit $p_1 = R_1(p_2)$ ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{a + c - 2p_2}{-b} &= \frac{a + c + bp_2}{2} \\
2a + 2c - 4p_2 &= -ab - bc - b^2 p_2 = -b(a + c) - b^2 p_2 \\
2(a + c) + b(a + c) &= (4 - b^2) p_2 \\
(2 + b)(a + c) &= (2 - b)(2 + b) p_2 \\
\Rightarrow \quad p_2^* &= \frac{a + c}{2 - b} = p_1^*
\end{aligned}$$

Einleitung

- Bei Spielen mit vollständiger Information sind Strategiemengen und Auszahlungen gemeinsames Wissen

Einleitung

- Bei Spielen mit vollständiger Information sind Strategiemengen und Auszahlungen gemeinsames Wissen
- Unvollständige Information: Mindestens eine Information ist privat (in der Regel die Auszahlungsfunktion)

Einleitung

- Bei Spielen mit vollständiger Information sind Strategiemengen und Auszahlungen gemeinsames Wissen
- Unvollständige Information: Mindestens eine Information ist privat (in der Regel die Auszahlungsfunktion)

Typologisierung:
Man versucht verschiedene Ausprägungen des Merkmals festzulegen.

- T_i heißt Typenraum des Spielers i, $t_i \in T_i$ möglicher Typ
- Spieler i kennt nur seinen Typ und versucht Erwartungen für die Typen der anderen Spieler zu bilden

Notation

- $T_{-i} = T_1 \times \ldots T_{i-1} \times T_{i+1} \ldots T_n$ Typenraum aller anderen Spieler
- Erwartung eines Spielers von Typ i über den Typ der anderen Spieler: $p_i(t_{-i}|t_i)$

Auszahlung

- Die Strategie von Spieler i hängt von seinem Typ i, und von seinen Vermutungen über die Typen der anderen Spieler ab
- Spieler i muss sich auch Gedanken machen, welche Vermutungen die anderen Spieler über ihn anstellen $\Rightarrow$ die Auszahlung hängt von der Strategien (welche von den Typen abhängen) und den tatsächlichen Typen ab

Auszahlung

- Die Strategie von Spieler i hängt von seinem Typ i, und von seinen Vermutungen über die Typen der anderen Spieler ab
- Spieler i muss sich auch Gedanken machen, welche Vermutungen die anderen Spieler über ihn anstellen $\Rightarrow$ die Auszahlung hängt von der Strategien (welche von den Typen abhängen) und den tatsächlichen Typen ab

Erwartete Auszahlung

$$E[u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i})] = \sum_{t_{-i}} p_i(t_{-i}|t_i) u_i(s_i(t_i), s_{-i}(t_{-i}), t_i, t_{-i})$$

Bayes Nash-Gleichgewicht

- Ein rationaler Spieler wählt die Strategie, welche seine Auszahlung bezüglich der Erwartungen der anderen Spieler maximiert.
- Auch wenn ein Spieler weiß, dass er von Typ i ist, muss er die selben Rechnungen für alle Typen einbinden, da die anderen Spieler mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass der Spieler nicht von Typ i ist, und dementsprechend ihre Strategien anders wählen

Bayes Nash-Gleichgewicht

- Ein rationaler Spieler wählt die Strategie, welche seine Auszahlung bezüglich der Erwartungen der anderen Spieler maximiert.
- Auch wenn ein Spieler weiß, dass er von Typ i ist, muss er die selben Rechnungen für alle Typen einbinden, da die anderen Spieler mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit davon ausgehen, dass der Spieler nicht von Typ i ist, und dementsprechend ihre Strategien anders wählen

Bayes Nash-Gleichgewicht Ein Strategievektor $(s_i^*(t_i), s_{-i}^*/t_{-i})$ heißt Bayes- Nashgleichgewicht, wenn

$$E[u_i(s_i^*(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i, t_{-i})] \geq E[u_i(s_i(t_i), s_{-i}^*(t_{-i}), t_i, t_{-i})]$$
$$\forall s_i \in S_i, t_i \in T_i, i = 1 \ldots n$$

Spielbeschreibung

- Zwei Anbieter $i = 1, 2$ eines homogenen Gutes
- Nachfragefunktion: $p(x) = a - x = a - x_1 - x_2$
- Kostenfunktion von Unternehmen 1: $K_1(x_1) = c_1 x_1$ ist gemeinsames Wissen
- Kostenfunktion von Unternemen 2 ist dessen private Information
- Typologisierung: $T_2 = \{c_L, c_H\}$

$$
\begin{aligned}
t_{2L}: &\qquad K_{2L}(x_2) = c_L x_2 \\
t_{2H}: &\qquad K_{2H}(x_2) = c_H x_2 \quad \text{mit } c_H > c_L
\end{aligned}
$$

- Erwartungen: $p(t_{2L}) = q, \quad p(t_{2H}) = 1 - q.$

$$G_{2L} = (a - x_1 - x_2)x_2 - c_L x_2$$
$$G_{2H} = (a - x_1 - x_2)x_2 - c_H x_2$$

Unabhängig von dem tatsächlichen Typ muss Unternehmen 2 für *beide* Fälle die Reaktionsfunktionen kalkulieren, weil Unternehmen 1 bei seiner Entscheidung ebenfalls beide Reaktionsfunktionen in Betracht zieht:

$$\Rightarrow \qquad x_2(t_{2L}) = \frac{a - x_1 - c_L}{2}$$
$$\Rightarrow \qquad x_2(t_{2H}) = \frac{a - x_1 - c_H}{2}$$

Unternehmen 1 maximiert seinen erwarteten Gewinn:

$$
\begin{aligned}
E[G_1] &= q[(a - c_1 - x_1 - x_2(t_{2L}))x_1] \\
&\quad + (1-q)[(a - c_1 - x_1 - x_2(t_{2H}))x_1] \\
&= (a - c_1 - x_1)x_1 - (qx_2(t_{2L}) + (1-q)x_2(t_{2H}))x_1 \\
\frac{\partial E[G_1]}{\partial x_1} &= a - c_1 - 2x_1 - \underbrace{(qx_2(t_{2L}) + (1-q)x_2(t_{2H}))}_{E[x_2]} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad x_1 = R_1(E[x_2]) = \frac{a - c_1 - (qx_2(t_{2L}) + (1-q)x_2(t_{2H}))}{2}
$$

Bayes Nash-Gleichgewicht

$$x_1 = \frac{a - c_1 - \left[q\left[\frac{a-x_1-c_L}{2}\right] + (1-q)\left[\frac{a-x_1-c_H}{2}\right]\right]}{2}$$

$$= \frac{2a - 2c_1 - [a - x_1 - qc_L - (1-q)c_H]}{4}$$

$$\frac{3}{4}x_1 = \frac{a - 2c_1 + qc_L + (1-q)c_H}{4}$$

$$x_1^* = \frac{a - 2c_1 + qc_L + (1-q)c_H}{3}$$

Gleichgewichtige Mengenentscheidung von Unternehmen 2....

... vom Typ t_{2L} : $\quad x_2^*(t_{2L}) = \frac{a - 2c_L + c_1}{3} - \frac{(1-q)}{6}(c_H - c_L)$

... vom Typ t_{2H} : $\quad x_2^*(t_{2H}) = \frac{a - 2c_H + c_1}{3} - \frac{q}{6}(c_L - c_H)$

Literatur

- http://www.spieltheorie.de/Spieltheorie_Grundlagen/was-ist-spieltheorie.htm
- Spieltheorie Vorlesung - Friedrich Schiller Universität Jena; Dr. M Pasche
- http://de.wikipedia.org/wiki/Spieltheorie

Danke für eure Aufmerksamkeit