

TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN

SEMINARARBEIT AUS FINANZ- UND
VERSICHERUNGSMATHEMATIK

SOMMERSEMESTER 2013

**Absicherungsstrategien für das
Langlebigkeitsrisiko**

José Carlos ANTOLÍN RODRÍGUEZ
1127194

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Rentenprodukte und Absicherungsstrategien	4
2.1	Cashflows von Rentenprodukte	4
2.2	Absicherungsinstrumenten	5
2.2.1	q-Forward	5
2.2.2	q-Forwards (Bucketed)	5
2.2.3	Longevity Bonds	6
2.3	Preis von Absicherungsinstrumenten	7
2.4	Absicherungsstrategien	7
2.5	Vergleichungen	9
2.6	Risikomaße	12
2.7	Szenario Analyse	12
3	Modelle für Markt- und Langlebigkeitsrisiko	13
3.1	Simulation	14
3.2	Sterblichkeitsmodelle	15
4	Ergebnisse der statische Absicherung für Rentenportfolios	17
5	Zusammenfassung und Schlussfolgerungen	22

1 Einleitung

Weltweit ist die Lebenserwartung in der letzten Zeit ohne Pause gestiegen, was die öffentliche Pensionssysteme unter einer immer größeren Druck gesetzt haben. Zusätzlich haben die Ungewissheit und die Volatilität der zukünftige Lebenserwartung das Risiko zugenommen, die Personen und Versicherungsunternehmen übernehmen müssen. Zum Beispiel würde dieses Risiko für einzelne Personen daraus bestehen, die Schätzung der einige restliche Lebenszeit unter- oder überschätzen und damit nicht genug Reserve haben oder zu viel Geld in Pensionsprodukte investieren.

Die traditionelle Versicherungsprodukte für die Langlebigkeit umfassen Leibrente, indexierte Rente und aufgeschobene Rente. Eine Neuheit sind die Renten mit garantierte Lebensdauer Rückzug (GLWB) ¹. Das GLWB ermöglicht den Versicherer, das Langlebigkeits- und Marktrisiko abzudecken und erlaubt gleichzeitig den Versicherungsnehmer mehr Flexibilität und Liquidität im Vergleich zu Leibrenten.

Die Rentenmärkte sind sehr unterschiedlich ausgebaut. Während die Märkte in den Vereinigte Königreich und den Vereinigte Staaten breit entwickelt sind, handelt es sich in Deutschland und Österreich um einem aufstrebender Markt, hauptsächlich wegen der große Abdeckung der Soziale Sicherheit in beiden Länder. Abbildung 1 zeigt die Größe der Rentenmärkte im Verhältnis zur Größe der Wirtschaft. Pfeile um die Position zeigen neuere oder erwartete Änderungen. Die Vereinigte Königreich hat proportional der größte Markt. Wie oben erwähnt ist der Markt in Deutschland klein. In der Zukunft sollen die demografische Drücke und die Reformen der steuerliche Vorschriften die Attraktivität der Privatwirtschaft in Deutschland erhöhen. Diese Seminararbeit wird sich grundsätzlich auf Daten aus Australien und eventuell aus dem Vereinigte Königreich basiert.

Ein lebensfähige Rentenmarkt erfordert, dass die Versicherungsunternehmen fähig sind, ihre Risiko zu übernehmen ohne exzessive Reserven zu bilden. Das Langlebigkeitsrisiko kann auf verschiedene Art und Weise einschließlich Rückversicherung und Absicherung (Hedging) in finanzielle Märkte abgesichert werden. Versicherungsunternehmen berücksichtigen immer mehr die Absicherung und die Verbriefung (Securitization), da Rückversicherer sich dagegen gesträubt haben, eine signifikante Menge von Langlebigkeitsrisiko zu akzeptieren. Verbriefung von Sterblichkeitsrisiko wurde schon erfolgreich angewandt, nicht aber Verbriefung von Langlebigkeitsrisiko.

Im Jahr 2007 veröffentlichte JPMorgan den LifeMetrics Index. Ein Jahr später fand die erste an diese Index gebundene Transaktion statt, eine q-Forward. Die Ausgabe von

¹Guaranteed lifetime withdrawal benefit

Survivor und Longevity Bonds seitens der Regierung wurde in der wissenschaftliche Literatur mehrmals vorgeschlagen.

Figure 1. Schematic representation of selected annuity markets

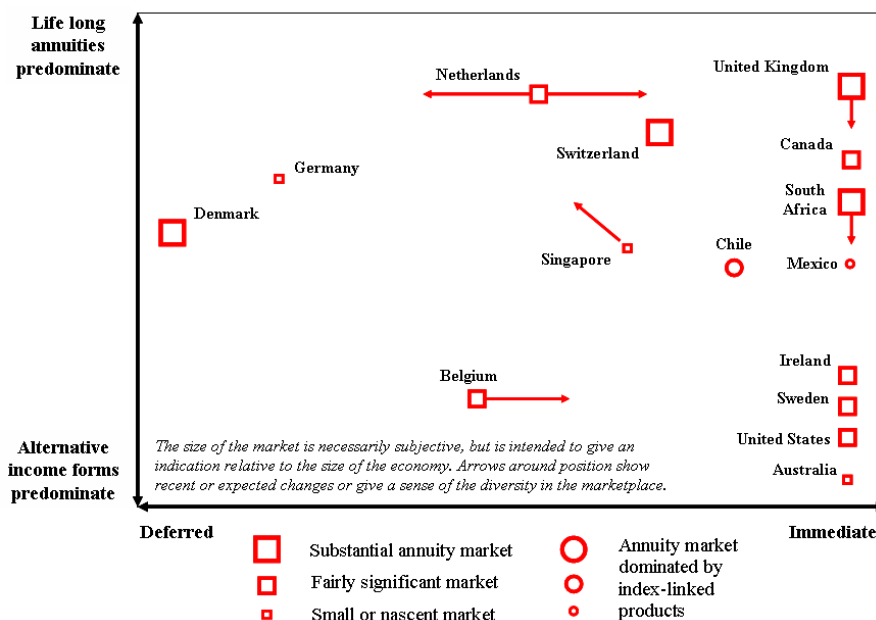


Abbildung 1: Rentenmärkte (Quelle: OECD [2])

Diese Seminararbeit untersucht die Wirksamkeit von statischen Absicherungsstrategien für das Management vom Langlebkeitsrisiko unter der Benutzung von Longevity Bonds und Derivaten (q-Forwards) für die oben erwähnte Versicherungsprodukte: Leibrente, indexierte Rente, aufgeschobene Rente und variable Renten mit GLWB. Sterbelichkeits- und Marktmodelle werden für das Underlying Risiko entwickelt. Das Marktmodell ist eine „regime switching vector error correction model“ (RS-VECM) für das BIP, die Inflation, die Zinsraten und die Börsenkurse. Das Sterblichkeitsmodell ist ein logit Modell in diskreter Zeit für die Sterblichkeitsrate in Abhängigkeit des Alters. Die Modelle wurden mit australische Daten geschätzt und das Basisrisiko wurde auf die Erfahrung des Vereinigtes Königreich basiert.

Im ersten Kapitel wird eine Beschreibung der Rentenprodukte und Absicherungsstrategien gegeben. Das zweite Kapitel stellt die Modellen für Märkte und Langlebkeitsrisiko vor. Die Ergebnis werden danach durchgesprochen und zum Schluss wird eine Zusammenfassung und die Schlussfolgerung der Analyse gegeben.

2 Rentenprodukte und Absicherungsstrategien

Die Analyse betrachtet die folgende Liste von Produkte: Leibrenten, inflationsindexierte Leibrenten, aufgeschobene Renten, inflationsindexierte aufgeschobene Renten und variable Renten mit GLWB. Die analysierte Portfolio besteht aus 1000 männliche Policen mit anfänglichem Alter 65, das heißt, das Pensionsalter in Australia. Um die Analyse einfacher zu machen, wird es nur eine Kohorte von Personen im Alter von 65 betrachtet. Das maximale Alter wird $\omega = 111$ angenommen, das heißt also, dass die Zeithorizont $T = 46$ ist. Für sofortige und variable Renten wird eine einmalige Prämie von 100,000\$ vorausgesetzt. Für aufgeschobene Rente nur von 10,000\$.

Nachdem alle Versicherungsnehmer gestorben sind, wird der Überschuss mit der an australische Daten angepassten Markt- und Langleblichkeitsmodellen simuliert, um das Langleblichkeitsrisiko und die Wirksamkeit der statische Absicherungsstrategien einzuschätzen. Diese Strategien einschließen Zero Coupon Bonds, Longevity Bonds und q-Forwards. Es wird angenommen, dass der Versicherer in risikolose Bonds von alle Maturitäten, in einer Marktkonto und in einem Eigenkapitalportfolio investieren kann. Der Überschuss zur Zeit t ist gegeben durch:

$$U_t = U_{t-1}(1 + R_t^U) + P_t - C_t + H_t \quad (1)$$

wobei

U_t = Versicherersüberschuss zur Zeit t

P_t = gesamte Prämien zur Zeit t

C_t = gesamte Forderungen zur Zeit t

H_t = Netto Absicherungscashflows zur Zeit t

2.1 Cashflows von Rentenprodukte

Für Leibrenten und indexierte Renten gibt es eine einmalige Prämie P_0 zur Zeit 0 und eine jährliche Zahlung an die Überlebenden (Leistungsverpflichtungen). Marktpreise für sofortige Renten wurden auf Ganegoda und Bateman (2008) [3] basiert. Der Preis der aufgeschobene Renten wurden mit das Money's Worth Ratio von sofortigen Renten festgesetzt, um Konsistenz zu versichern:

$${}_{20|}a_{65}^* = \left(\frac{a_{65}^*}{a_{65}} \right) {}_{20|}a_{65} \quad (2)$$

Die Cashflows der variable Renten mit GLWB wurden auf US-Produkten und Preisanalysen basiert (Bauer et al, 2006 [4]; Holz et al, 2007 [5] und Hill et al (2008) [6]). Die

Stornoquoten werden berücksichtigt und es wird angenommen, dass alle Versicherungsnehmer die selbe Entscheidungen treffen und genau gleich investieren.

2.2 Absicherungsinstrumenten

Die vorhandenen Absicherungsinstrumenten sind Zero Coupon Bonds, q-Forwards und Longevity Bonds. q-Forwards wurden in dem OTC Markt ausgegeben. Zurzeit gibt es Longevity Bonds in Australia nicht, um Renten Cashflows abzusichern. Es wurde vorgeschlagen, dass die Regierung solche Bonds ausgeben sollte, um die Entwicklung des Markts voranzutreiben. Obwohl das längsten Bond in Australia nur 15 Jahren dauert, was im Durchschnitt ziemlich weniger als die Lebenserwartung eines Rentner ist, wird das Zinsraterisiko durch risikolose Bonds abgesichert. Ein Zero Coupon Bond mit Maturität τ zahlt ein Cashflow von 1\$ zur Zeit τ und hat keine Langlebigkeitsrisiko.

2.2.1 q-Forward

Eine q-Forward ist ein Terminkontrakt für die Sterblichkeitsrate. Es liefert die wirkliche Sterblichkeitsrate $q_{x,t}$ gegen einer fixierte Sterblichkeitsrate q_x^F . Die Cashflows von einem q-Forward mit Maturität τ wird in dem folgendem Diagramm dargestellt.



Abbildung 2: Struktur von einem τ -jährigen q-Forward

q-Forwards werden benutzt, um Longevity Swaps für die erwartete Forderungen des Versicherers gemäß eines standardisierte Bevölkerungsindex zu bilden. Daraus ergibt sich ein Basisrisiko, da die Sterblichkeitserfahrung des Versicherers aus seinen Versicherungsnehmer und nicht aus der Bevölkerung entsteht.

2.2.2 q-Forwards (Bucketed)

In der Praxis werden die q-Forwards „bucketed“ in 5 jährige Altersgruppen (65-69, ..., 105-109) betrachtet, um die Liquidität durch die Verminderung der Verträge zu verbessern. Die bucketed q-Forwards werden auf die durchschnittliche Sterblichkeitsrate jeder Altersgruppe basiert.

2.2.3 Longevity Bonds

Zahlungen der Longevity Bonds hängen von der Fortlebenserfahrung einer Kohorte zusammen und werden auf Bevölkerungsterblichkeitsrate basiert. Aufgeschobene Longevity Bonds werden auch betrachtet. Zero Coupon Longevity Bonds zahlen ein einzige Betrag $S_x(\tau)$ zur Maturität τ proportional zur Anzahl der Personen, die noch am Leben bleiben. Zum Beispiel nach einem Jahr überleben mehr Personen als erwartet, dann bekommt der Käufer des Longevity Bonds mehr Geld, das er verwenden kann, um die zusätzliche Leistungen abzudecken. Abbildung 3 zeigt das Cashflow eines Zero Coupon Longevity Bond. Im Alter 65 sind ungefähr 20 Jahre die Lebenserwartung und 40 Jahre das maximale erreichbare Alter. Deswegen werden die Maturitäten des Longevity Bonds auf 20 und 40 festgesetzt, um die Absicherung des Langleblichkeitsrisikos effektiv zu machen. Zahlungen entstehen aus der tatsächliche Überlebensrate der Bevölkerung. Das 20-jährige Bond ist ein sofortiges Bond, während das 40-jährige Bond ein 20 Jahre aufgeschobenes Bond ist. Die beide zusammen können als ein sofortiges 40-jähriges Bond benutzt werden. Abbildung 4 bzw. 5 zeigen das Cashflow eines 20-jährige bzw. 40-jährige Longevity Bond.

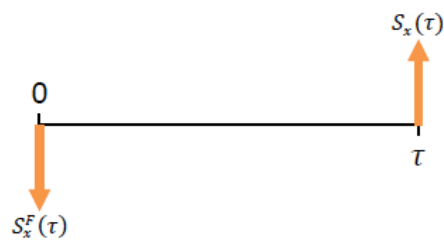


Abbildung 3: Struktur von einem τ -jährigen Zero Coupon Longevity Bond

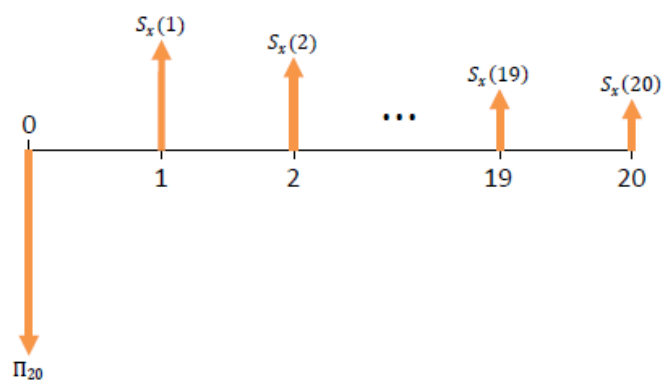


Abbildung 4: Struktur von einem 20-jährigen Longevity Bond

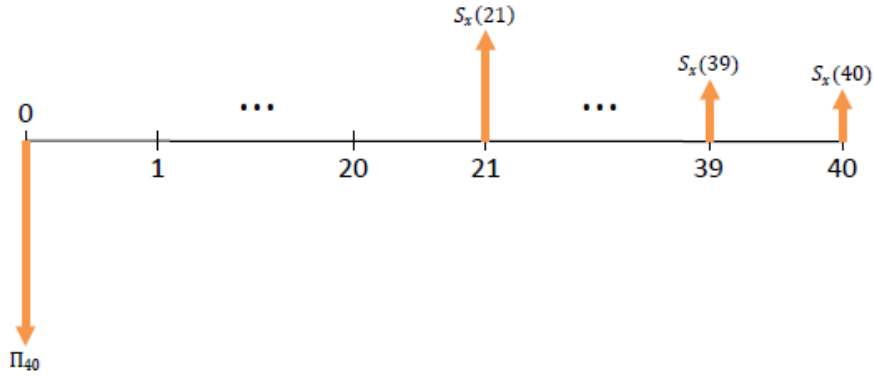


Abbildung 5: Struktur von einem 40-jährigen Longevity Bond

Longevity Bonds sind äquivalent zu einem Portfolio von Zero Coupon Longevity Bonds. Die Auszahlung eines Zero Coupon Longevity Bond ist ähnlich wie bei einem Zero Coupon Bond plus eines Portfolio aus q-Forwards, da die Sterblichkeitsraten $q_{x+t,t}$ für $t < \tau$ sich auf die Überlebenswahrscheinlichkeit $S_x(\tau)$ auswirkt.

2.3 Preis von Absicherungsinstrumenten

Der Preis der Zero Coupon Bonds wird durch die Marktdaten aus dem „Reserve Bank of Australia“ festgesetzt. Der Preis der q- Forwards wird folgendes berechnet:

$$q_{x,t}^F = (1 - S_q \sigma_x t) q_{x,t}^E \quad (3)$$

wobei S_q die Sharpe-Ratio für den q-forward ist, $q_{x,t}^E$ die erwartete Sterblichkeitsrate unter das „real-world“ Maß P und σ_x die historische Volatilität der Sterblichkeitsraten:

$$q_{x,t}^E = E_P(q_{x,t} | \mathcal{F}_0) \quad (4)$$

$$\sigma_x^2 = \text{Var} \left(\frac{\Delta q_{x,t}}{q_{x,t}} \right) \quad (5)$$

Es wurde eine Sharpe-Ratio von 0,20 gewählt, wie bei den Rentenmarkt im Vereinigten Königreich.

2.4 Absicherungsstrategien

Statische Absicherungsstrategien haben derzeit mehrere Vorteile gegen die dynamische Absicherungsstrategien. Dynamische Strategien sind schwierig zu implementieren, wegen die Illiquidität und die hohe Transaktionskosten. Obwohl dieses Problem in der

Zukunft wechseln kann, wenn der Markt sich entwickelt. Um die Wirksamkeit der Strategien zu bewerten, werden die Verteilungen der Überschüsse vergleicht. Als Basis für die Vergleichen wird der „keine Langlebigkeitsabsicherung“ (no longevity hedging) Fall zusammen mit dem „kein Langlebigkeitsrisiko“ (no longevity risk) Fall verwendet. In diesem zweiten Fall wird die Sterblichkeit deterministisch ausgenommen. Für den „keine Langlebigkeitsabsicherung“ Fall wird eine passende Aktiv-/Passiv-Strategie (asset liability matching strategy) unter der Benutzung von Zero Coupon Bonds und erwartete Sterblichkeitsrate für die Cashflows verwendet. Folgende Absicherungsstrategien werden bewertet:

- q-Forwards
- q-Forwards (Bucketed)
- 20-jährige Longevity Bond
- 40-jährige Longevity Bond
- Beide Longevity Bonds
- Longevity Swap

Die q-Forwards werden zusammen mit einer Portfolio von Zero Coupon Bonds benutzt, um die erwartete Leistungen mit der fixierte Sterblichkeitsrate zu entsprechen. Die Unterschied zwischen den erwartete Leistungen und den tatsächliche Leistungen wird mit q-Forwards abgesichert. Um die Absicherung bilden zu können, muss die Überlebenswahrscheinlichkeit in Bezug auf die Unterschiede zwischen den tatsächlichen und zukünftigen Sterblichkeitsraten ausgedrückt werden. Das kann man folgendes approximieren:

$$\begin{aligned}
S_x^A(t) &= \prod_{\tau=1}^t (1 - q_{x+\tau-1}^A) \\
&\approx \prod_{\tau=1}^t (1 - \hat{\rho}_{x+\tau-1} q_{x+\tau-1}) \\
&= \prod_{\tau=1}^t (1 - \hat{\rho}_{x+\tau-1} q_{x+\tau-1}^F + \hat{\rho}_{x+\tau-1} (q_{x+\tau-1}^F - q_{x+\tau-1})) \\
&\approx S_x^{FA}(t) \left(1 + \sum_{\tau=1}^t \frac{\hat{\rho}_{x+\tau-1} (q_{x+\tau-1}^F - q_{x+\tau-1})}{1 - \hat{\rho}_{x+\tau-1} q_{x+\tau-1}^F} \right)
\end{aligned} \tag{6}$$

wobei $(\cdot)^A$ eine Rentnersrate kennzeichnet, $S_x^{FA}(t) = \prod_{\tau=1}^t (1 - \hat{\rho}_{x+\tau-1} q_{x+\tau-1}^F)$ die fixierte (forward) Überlebenswahrscheinlichkeit entsprechend $S_x^A(t)$ und $\hat{\rho}_{x,t}$ die Koeffizient

zwischen den Rentner- und Bevölkerungsterbewahrscheinlichkeiten $q_{x,t}^A$ und $q_{x,t}$ ist. Bucketed q-Forwards werden äquivalent benutzt.

Anstelle Zero Coupon Bonds werden Longevity Bonds verwendet, um die Leistungen des Versicherers besser anzupassen. Wie oben erwähnt, drei Arten von Strategien mit Longevity Bonds werden betrachtet: das Kaufen eines 20-jähriges Longevity Bond, eines aufgeschobenes 40-jähriges Longevity Bond und beider Longevity Bonds. Die Cash-flows der Longevity Bonds sind proportional zur Überlebenswahrscheinlichkeit der Bevölkerung $S_x(t)$, während die Leistungen des Versicherers von der Sterblichkeit der Rentner $S_x^A(t)$ abhängt. Im Fall der indexierte Renten steigt die Leistungen des Versicherers mit der Inflation.

Im Fall der Renten mit GLWB ist das Bilden eines wirksames statische Absicherung sehr kompliziert. In einem durchschnittlichen oder vorteilhaften Markt ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Rentner den Wert seiner Police überlebt, niedrig. In einem widrigen Marktumfeld wird es aber eine große Menge von Leistungen geben. Man kann eine GLWB als eine aufgeschobene Rente mit stochastische Zahlungen betrachten. Sobald der Wert des Polices entleert wird, wandelt sich die Produkt in einem Leibrente um. Aus diesem Grund werden die Renten mit GLWB durch 40-jährige aufgeschobene Longevity Bonds abgesichert, wie bei den aufgeschobene Leibrenten.

Das Longevity Swap wird mit Zero Coupon Bonds konstruiert. Die Longevity Bonds werden auf die Überlebenswahrscheinlichkeit der Bevölkerung $S_x(t)$ basiert und zusammen mit den Zero Coupon Bonds können verwendet werden, um die Unterschied zwischen die erwartete Sterbewahrscheinlichkeit des Rentners und die Sterbewahrscheinlichkeit der Bevölkerung abzusichern.

2.5 Vergleichen

In den Abbildungen 6 bis 10 wird die Vergleichung zwischen den Cashflows in einer Portfolio von sofortigen Leibrenten unter der Berücksichtigung von den schon angesprochenen Absicherungsstrategien gezeigt. Cashflows am Anfang und am Ende werden nicht gezeigt. Es wurde angenommen, dass eine Verbesserung der Sterblichkeit allmählich stattfände und schließlich eine Verbesserung von ca. 25% bezüglich der prognostizierten Raten erreicht wurde. Die endgültigen Überschüsse für jede Strategie in dieser Probe sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Die endgültige Überschuss steigt wegen der Absicherung der Sterblichkeit und sinkt aufgrund der Kosten für die Absicherung.

No L Hedging	No L Risk	q-Forwards	L Bond (20y)	L Bond (40y)	L Swap
94.69	139.37	118.58	108.28	109.23	122.91

Tabelle 1: Simulierte endgültige Überschüsse für Leibrente

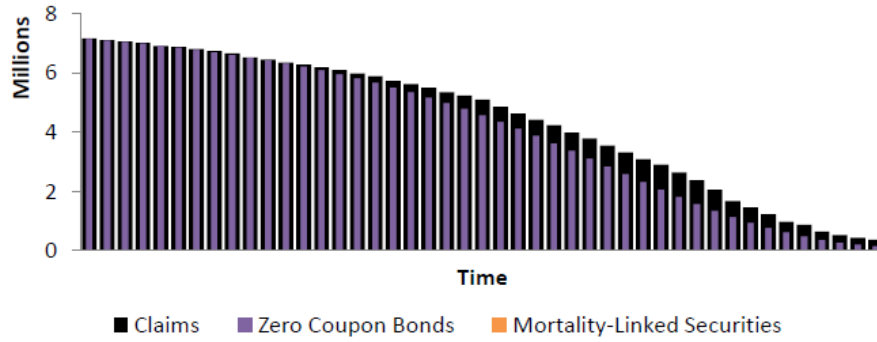


Abbildung 6: Simulierte Cashflows für Leibrente mit keiner Langlebigkeitsabsicherung (ZCBs)

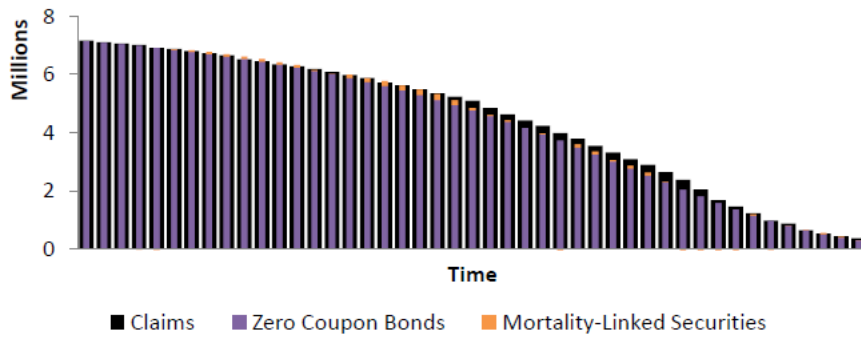


Abbildung 7: Simulierte Cashflows für Leibrente mit q-Forwards

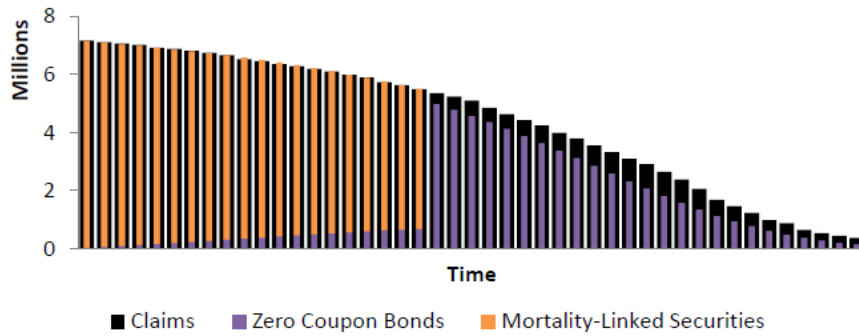


Abbildung 8: Simulierte Cashflows für Leibrente mit einem 20-jährigen Longevity Bond

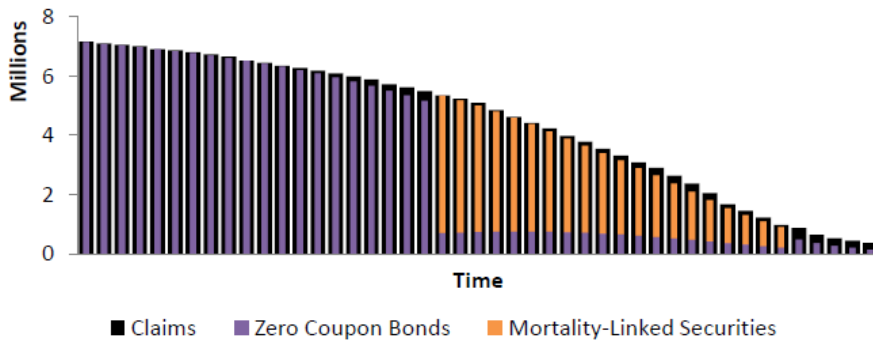


Abbildung 9: Simulierte Cashflows für Leibrente mit einem 40-jährigen Longevity Bond

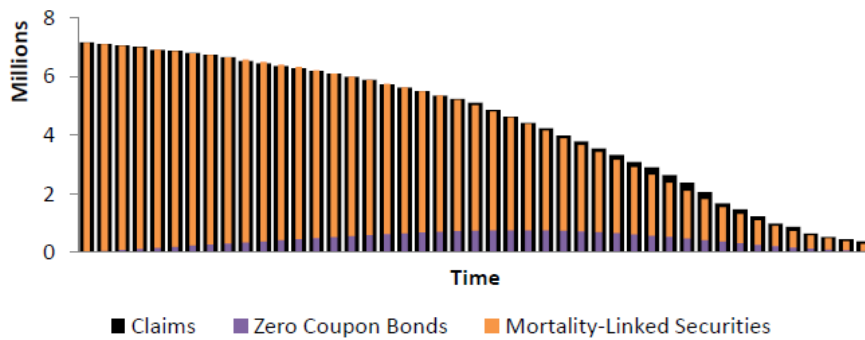


Abbildung 10: Simulierte Cashflows für Leibrente mit einem Longevity Swap

2.6 Risikomaße

Die Absicherungsstrategien werden mit der Verteilung der endgültigen Überschuss U_T mit 100,000 Simulationen verglichen. Der Expected Shortfall (ES) wird verwendet, da es sowohl die Verlustwahrscheinlichkeit als auch das Ausmaß der Verlust in der Überschussverteilung beobachtet. Der α -VaR einer Zufallsvariable X ist das α -Quantil der Verteilung:

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{X : F_X(\text{VaR}_\alpha) \geq \alpha\} \quad (7)$$

Der entsprechende Expected Shortfall ist gegeben durch:

$$\text{ES}_\alpha(X) = E(X|X < \text{VaR}_\alpha) \quad (8)$$

2.7 Szenario Analyse

Die Absicherungsstrategien wurden für eine Reihe von Szenarien, einschließlich Stress-tests bewertet. Die verwendete Szenarien waren:

Scenario	Market Assumption	Mortality Assumption
1	Stochastic	Stochastic
2	Average	Stochastic
3	Adverse	Stochastic
4	Stochastic	Average + Excess Imp. (2%/yr Accumulating)
5	Stochastic	Average + Excess Imp. (25% Flat)

Szenario 1 benutzt stochastischer Markt und Sterblichkeitsmodelle. Szenario 2 betrachtet ein deterministischer Markt mit stochastische Sterblichkeit wie bei Szenario 1. Bei Szenario 3 basiert sich der Markt auf den historischer Zeitraum zwischen 1930 und 1975, das heißt, mit der Weltwirtschaftskrise als Anfang. Diese Szenario wurde gedacht, um die Wirksamkeit der Renten mit GLWB als Absicherung gegen Marktrisiko zu bewerten. Szenario 4 stresstest die Langlebigkeit Absicherungsstrategien durch Anlegen einer deterministische Sterblichkeit aber mit 2% jährliche Verbesserung bezüglich der prognostizierten Raten. Dies spiegelt die zukünftige Entwicklung der Sterblichkeit, wo die Ergebnisse der Gesundheit Verbesserungen allmählich auf die Sterblichkeitsrate über das erwartete Niveau auswirken werden. Schließlich stresstest Szenario 5 die Strategien mit einer ständige 25% Verbesserung der Sterblichkeit aller Altersgruppen und Zeiten. Dies ist das Szenario, das unter Solvency II bei der Bestimmung der Langlebigkeitsrisiko Kapitalanforderungen vorgeschlagen wird.

3 Modelle für Markt- und Langlebigkeitsrisiko

Das verwendete Marktmodell ist ein „cointegrating vector error correction model with regime switching (RS-VECM)“. Dieses Modell ermöglicht die Analyse von sowohl kurzfristige Schwankungen durch die Autoregressive Struktur als auch die Heteroskedastizität durch das „Regime-Switching“. Ein allgemeines RS-VECM mit lag p hat folgende Form:

$$\Delta \mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu} + \sum_{i=1}^{p-1} \mathbf{A}_i \Delta \mathbf{y}_{t-i} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{y}_{t-p} + \boldsymbol{\epsilon}_t(\omega_t) \quad (9)$$

wobei \mathbf{y} ein d -dimensional Vektor von Beobachtungen ist, $\Delta \mathbf{y} = \mathbf{y}_t - \mathbf{y}_{t-1}$, $\boldsymbol{\mu}$ der Mittelwertvektor, \mathbf{A} eine $d \times d$ Koeffizientenmatrix, \mathbf{B} und \mathbf{C} $d \times r$ Matrizen, die die Kointegrationsbeziehung zwischen die Variablen beschreiben und $\boldsymbol{\epsilon}_t(\omega_t)$ ein regime-abhängig Vektor mit

$$\boldsymbol{\epsilon}_t(\omega_t) \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\omega_t}) \quad (10)$$

Zwei Regime wurden in diesem Modell benutzt. Ein stellt ein Marktzustand vor, wo eine hohe Volatilität gibt und das andere, ein Marktzustand mit normale Volatilität.

$$\omega_t = \begin{cases} 0 & \text{normale Regime} \\ 1 & \text{Regime mit hohe Volatilität} \end{cases} \quad (11)$$

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden durch eine Markovkette mit Übergangsmatrix \mathbf{P} beschreibt:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_0 & 1 - p_0 \\ 1 - p_1 & p_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

wobei die Wahrscheinlichkeiten p_0 und p_1 konstant sind.

Das Modell wurde mit einem zweistufigen Verfahren angepasst (Krolzig (1997) [7]). Der erste Schritt ist, den Kointegrationsrang r und die Matrix \mathbf{C} mit dem Johansen (1988, 1995) [8,9] Methodologie zu bestimmen. Die zweite Stufe des Verfahren verwendet ein Erwartung-Maximierung Algorithmus, um die übrigen Parameter zu schätzen. Folgende finanzielle und wirtschaftliche Zeitreihen sind im Modell enthaltet:

$\ln G_t$ = Log Gross Domestic Product (GDP)

$\ln B_t$ = Log Bond Index (Accumulated 90-day Bank-Accepted-Bill Yields)

$\ln S_t$ = Log Stock Price Index (ASX All Ordinaries)

$\ln F_t$ = Log Inflation Index (CPI)

Jede Variable ist eine Komponente vom Vektor \mathbf{y}_t . Das BIP (GDP) ist ein wichtiger makroökonomischer Variable, die mit den anderen Marktvariablen interagiert. Wegen

der bessere Verfügbarkeit von Daten, werden Bank Bill Yield statt Schatzwechsel für den risikolose Zinssatz verwendet. Für die indexierte Renten ist die Inflation nötig. Der Aktienindex und Zinssätze werden für die Investitionen und die Leistungen benötigt.

Markdaten wurden von der Reserve Bank of Australia (RBA) erhalten. Die maximale Zeitraum, über die Daten für die vier Variablen erhältlich waren, war zwischen 1970 und 2009.

3.1 Simulation

Das RS-VECM liefert Simulationen von makroökonomischer Zeitreihen in der Zukunft, die vergleichbar mit historischen Daten sind. Die Abbildungen 11 und 12 zeigen die durchschnittlichen Simulation Pfade und Rendite zusammen mit 95% Konfidenzintervalle. Abbildung 13 zeigt die simulierte Verteilung des BIP, Rentenindex, Aktienindex und CPI nach 45 Jahren. Abbildung 14 zeigt die gesamte Verteilung der Renditen für jede aus diesen Simulationen erhaltene Variablen und einen Vergleich mit der beobachteten (historische) Verteilung.

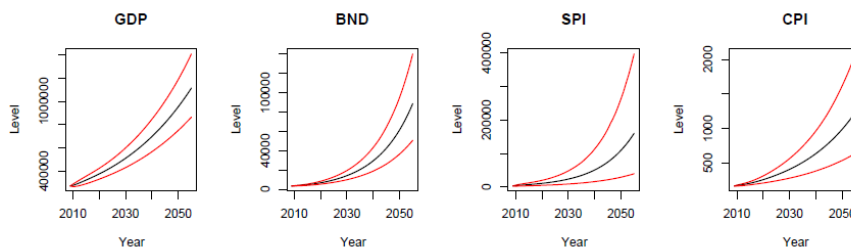


Abbildung 11: mittlere Simulationspfade (mit 95% KI) der Marktvariablen

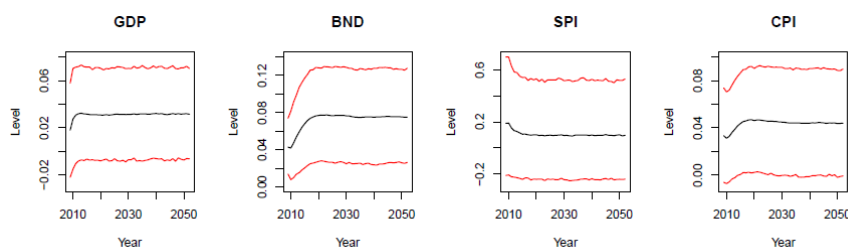


Abbildung 12: mittlere Simulationsrendite (mit 95% KI) der Marktvariablen

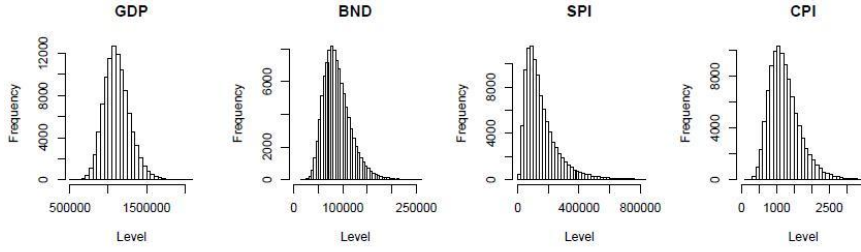


Abbildung 13: endgültige Verteilung der Marktindizes

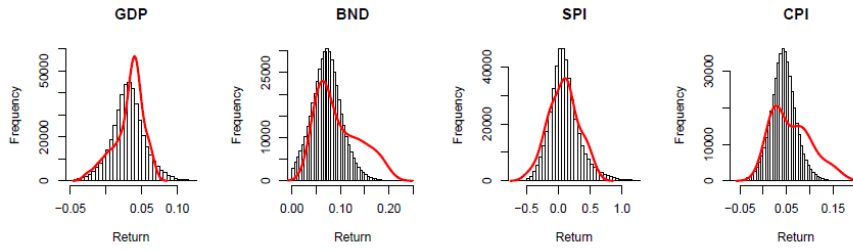


Abbildung 14: gesamte Verteilung der simulierte jährliche Rendite

3.2 Sterblichkeitsmodelle

Das Modell für die Sterbeintensität von einem x -jährige zur Zeit t ($\mu_{x,t}$) ist ein lineare Modell mit einem Altersfaktor x :

$$\Delta \text{logit } \mu_{x,t} \equiv \Delta \ln \frac{\mu_{x,t}}{1 - \mu_{x,t}} = a + bx + \epsilon_{x,t} \quad (13)$$

wobei a und b konstante Parameters sind und $\epsilon_{x,t}$ einen Fehlerterm darstellt. Die Differenzoperator wird in der folgende Form angewendet:

$$\Delta \text{logit } \mu_{x,t} = \text{logit } \mu_{x,t} - \text{logit } \mu_{x-1,t-1} \quad (14)$$

Der Fehlervektor zur Zeit t ist multivariate normal verteilt mit Mittelwert 0 und kann wie folgendes geschrieben werden:

$$\epsilon_t = (\epsilon_{x_1,t}, \dots, \epsilon_{x_N,t})' = \sigma \mathbf{W}_t \quad (15)$$

wobei σ ein deterministische Volatilität Parameter und $\mathbf{W}_t \sim \mathcal{N}_N(\mathbf{0}, \mathbf{D})$. Die Matrix \mathbf{D} beschreibt die Unabhängigkeitsstruktur zwischen den verschiedenen Alter. Das Modell wurde mit einem zweistufigen Verfahren wie in Wills and Sherris (2008) [10] angepasst.

Die Beziehung zwischen der Sterblichkeit der Rentner und der Bevölkerungssterblichkeit wird durch den Quotient $\rho_{x,t}$ modelliert

$$\rho_{x,t} = \frac{q_{x,t}^A}{q_{x,t}} \quad (16)$$

wobei $q_{x,t}^A$ bzw. $q_{x,t}$ die Sterblichkeitsrate der Rentner bzw. die Bevölkerungssterblichkeitsrate für das Alter x zur Zeit t ist. Um diese Quotient zu modellieren, wird ein lineares Modell verwendet:

$$\rho_{x,t} = \alpha + \beta x + \nu_{x,t} \quad (17)$$

$$\nu_{x,t} \sim N(0, \theta^2) \quad (18)$$

Die Beziehung zwischen der Sterblichkeit der Rentner und der Bevölkerungssterblichkeit wurde für den Zeitraum 2005-07 in Australia untersucht (Stevenson and Wilson (2008) [11]). Die Ergebnisse zeigten eine steigende lineare Beziehung zwischen dem Alter und dem Quotient. Die Veränderung im Quotient von Jahr zu Jahr aufgrund der Fehlerterme ist das Basisrisiko zwischen Bevölkerungs- und Rentenempfängersterblichkeit. Zum Vergleich sind die angepasste Quotienten in den Grafiken der beobachteten Quotienten in Abbildung 15 überlagert und auf das Alter 110 hochgerechnet.

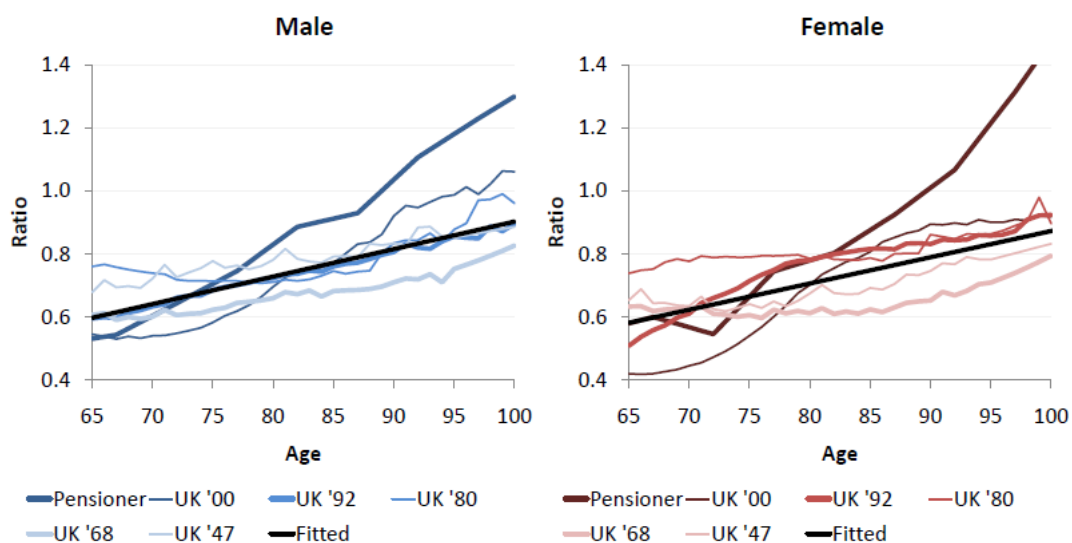


Abbildung 15: Beobachtete Rentner/Bevölkerungs Quotienten

4 Ergebnisse der statische Absicherung für Rentenportfolios

Die Absicherungsstrategien des Langlebigkeitsrisikos mit Hilfe von sterblichkeitsgebundenen Wertpapieren werden durch Simulation der Markt- und Sterblichkeitsmodellen bewertet. Die Wirkung des Basisrisikos, die die Hauptnachteile der an Bevölkerungsindexen gebundenen Wertpapieren ist, wird quantifiziert. Die Strategien vergleichen q-Forwards und Longevity Bonds. Während q-Forwards bereits von den Versicherern verwendet worden, könnten Longevity Bonds von den Regierungen in der Zukunft ausgegeben werden. Abbildung 16 zeigt die erwartete gesamte Leistungen der Rentenprodukte und Abbildung 17 die simulierte Verteilung des Überschuss U_T .

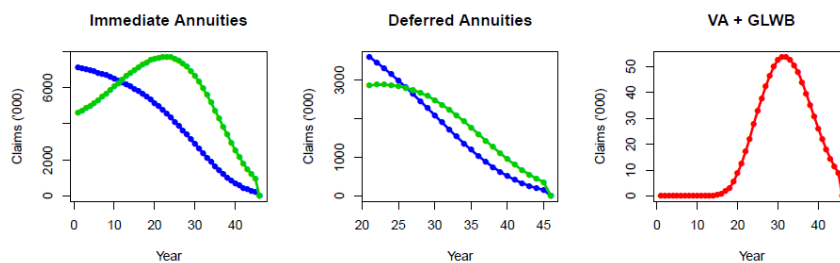


Abbildung 16: Erwartete Leistungen des Portfolios (Blau = Leibrente, Grün = indexierte Rente)

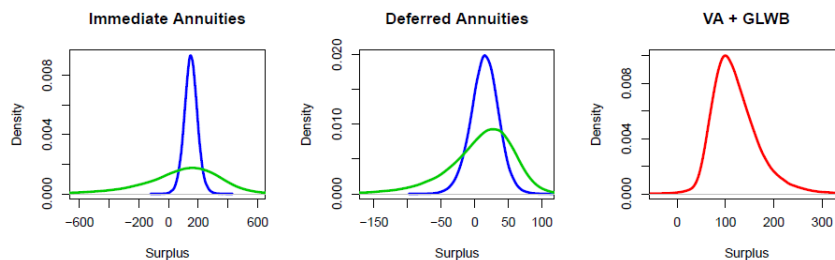


Abbildung 17: Simulierte Verteilung der endgültige Überschuss (Blau = Leibrente, Grün = indexierte Rente)

Die Unterschied zwischen den Leistungen der Leibrenten und der indexierte Renten spiegelt den Einfluss der erwartete Inflation. Tabelle 2 zeigt den Einfluss des Langlebigkeitsrisikos auf den Expected Shortfall. Mit kein Absicherung ist der Expected Shortfall für die indexierte Renten sehr signifikant, wegen des Inflationsrisiko. Im determi-

nistischen Fall, d.h. ohne Langlebigkeitsrisiko, ergeben alle Produkte bessere Expected Shortfalls bis auf die Variable Rente mit GLWB. Im Vergleich mit andere Produkte liefert die Variable Renten mit GLWB geringe Sicherung gegen die Langlebigkeit. Das Inflationsrisiko bzw. das Marktrisiko ist sehr signifikant für die indexierte Renten bzw. variable Renten wie die Tabelle 3 zeigt.

Annuity	Mean (No Hedging)	ES _{0.05} (No Hedging)	ES _{0.05} (No L Risk)
Life	150.3	54.6	116.2
Indexed Life	81.5	-642.3	-587.9
Deferred	14.7	-30.6	7.7
Def. Indexed	7.5	-133.5	-106.2
VA + GLWB	121.43	40.80	41.27

Tabelle 2: 5% Expected Shortfall (keine Absicherung gegen kein Langlebigkeitsrisiko)

Annuity	$\mu - \text{ES}_{0.05}$ (Stochastic)	$\mu - \text{ES}_{0.05}$ (Average)	% Difference
Life	95.7	88.5	8%
Indexed Life	723.8	173.8	76%
Deferred	45.3	42.8	6%
Indexed Def.	141.0	54.4	61%
VA + GLWB	80.6	5.3	93%

Tabelle 3: Stochastischer gegen durchschnittlicher Markt

Abbildungen 18 und 19 zeigen den Expeted Shortfall zu einer Reihe von Wahrscheinlichkeitsniveaus für die Absicherungsstrategien. Eine effektive Absicherungsstrategie wurde die Kurve der erwartete Expected Shortfall vom „kein Langlebigkeitsabsicherung“ Fall nach oben in Richtung des „kein Langlebigkeitsrisiko“ Fall. Die prozentuale Reduktion des Expected Shortfall wird folgendes quantifiziert:

$$\frac{\text{ES} - \text{ES}_{\text{NH}}}{\text{ES}_{\text{NR}} - \text{ES}_{\text{NH}}} \quad (19)$$

wobei ES_{NH} bzw. ES_{NR} die entsprechende Risikomaße unter dem Fall von „kein Langlebigkeitsabsicherung“ bzw „kein Langlebigkeitsrisiko“ sind. Abbildungen 20 und 21 zeigen die durchschnittliche Verminderung des Expected Shortfall (zum Niveau 1% bzw. 5%) für die fünf Szenarios und jede Strategie.

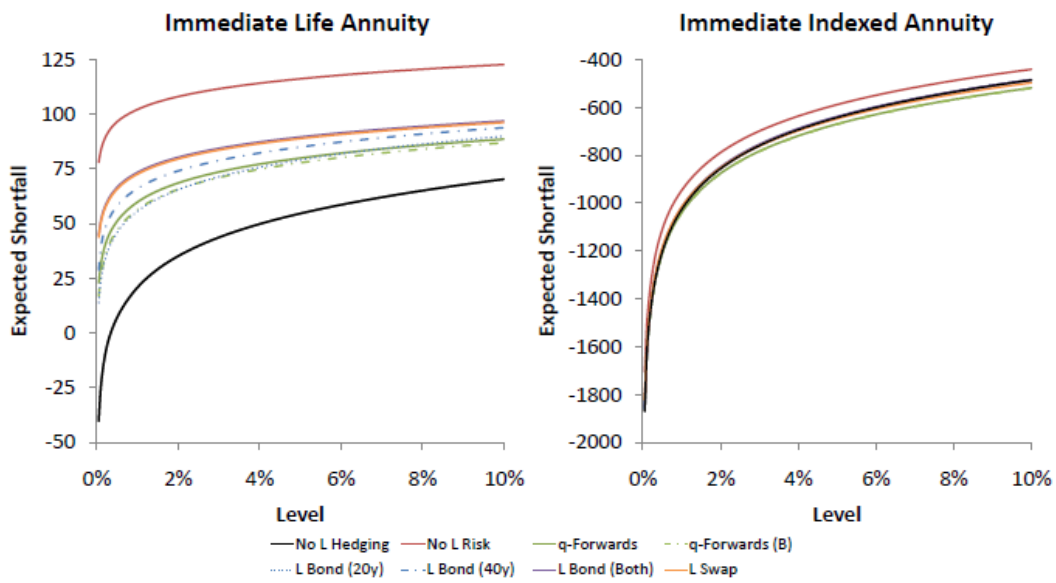


Abbildung 18: Wirksamkeit der Hedgingsstrategien auf den ES (sofortige Renten)

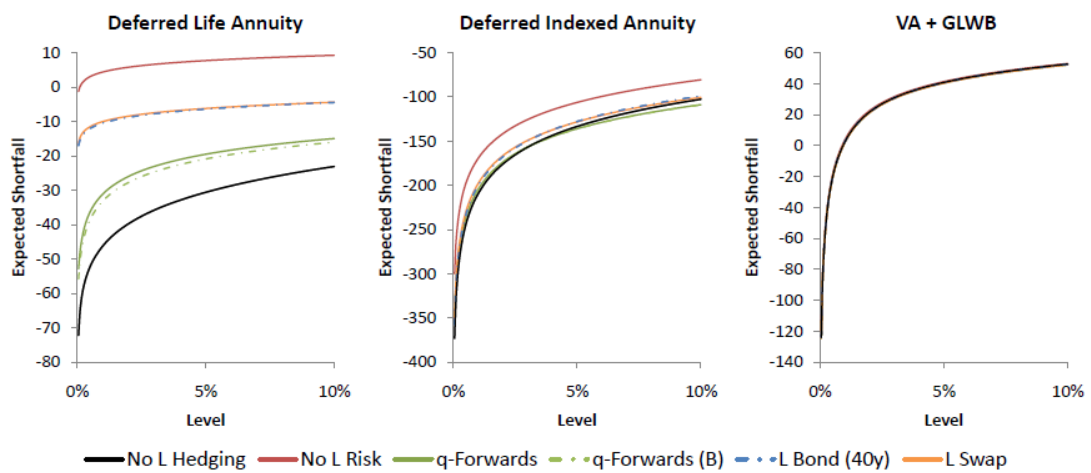


Abbildung 19: Wirksamkeit der Hedgingsstrategien auf den ES (aufg. Renten und GLBW)

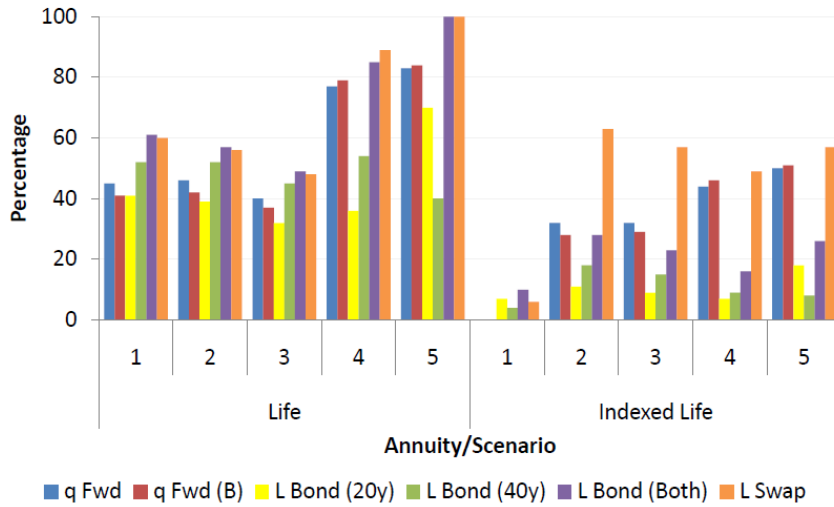


Abbildung 20: durchschnittliche Verminderung des ES (sofortige Renten)

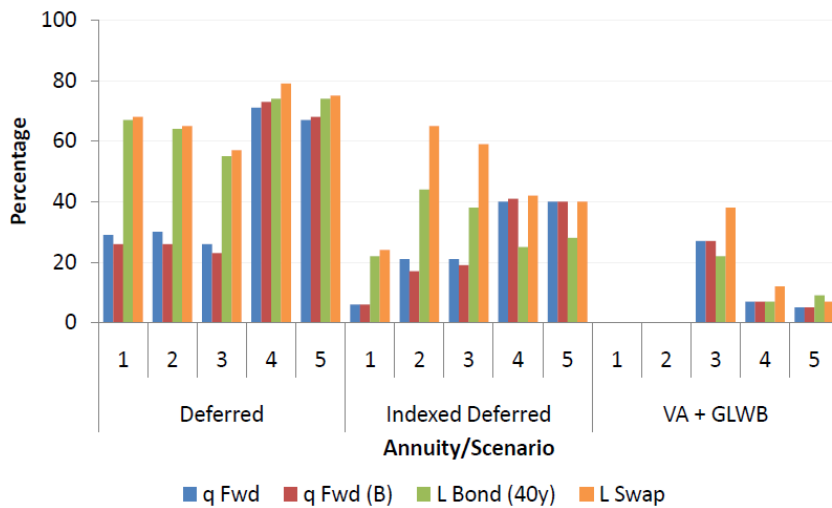


Abbildung 21: durchschnittliche Verminderung des ES (aufg. Renten und GLBW)

Im Rahmen der Stresstest-Szenarios (4 & 5) sind die Longevity Swaps (alle Produkte), q-Forwards (alle Produkte), beide Longevity Bonds (sofortige Leibrenten) und die 40-jährige Longevity Bonds (aufgeschobene Leibrenten) die wirksamsten Strategien.

Um die Auswirkung des Basisrisikos auf die Absicherung zu untersuchen, wurden verschiedene Unsicherheitsgrade im Quotient der Rentenempfänger- und Bevölkerungsterblichkeit verglichen (Tabelle 4). Der Einfluss vom Basisrisiko auf die Wirksamkeit der Absicherung ist in der Abbildung 22 dargestellt. Änderung des Basisrisikos aufgrund

der Unsicherheit in der Rentner-Bevölkerungs Quotient vermindert die Wirksamkeit der Absicherung wenig.

No Basis Risk	Basis Risk	150% Basis Risk
0%	6.68%	10.02%

Tabelle 4: Standardabweichung der Fehlerterm in dem Rentner-Bevölkerungs Quotientmodell

Eine Sensitivitätsanalyse wurde durchgeführt, um die Wirkung eines höheren bzw niedrigeren Preis des Risikos (Sharpe-Ratio) bei der Preisgestaltung von sterblichkeitsgebundenen Wertpapieren zu analysieren. Zum Vergleich mit dem Grundszenario von 0,20 wurden Sharpe Ratios von 0,15 und 0,25 berücksichtigt. In Abbildung 23 kann man die Ergebnisse beobachten: die Wirksamkeit der Absicherung ist sensitiv auf den Preis des Risikos. Trotzdem verändert sich die Wirksamkeit im Falle von Longevity Bonds und Swaps Strategien weniger, wenn die Sharpe Ratio auf 0,25 erhöht wird. Die Wirksamkeit des q-Forwards ist aber sehr sensitiv auf den Preis des Risikos, insbesondere wenn der Preis steigt. Also der Preis des Risikos hat einen größerer Einfluss auf die q-Forwards Strategien als auf den Longevity Bonds oder Swaps.

Nur in einem sehr widriges Szenario sind die garantierte Renten (Renten mit GLWB) wertvoll, da sie wenig Sicherung gegen das Langleblichkeitsrisiko schafft.

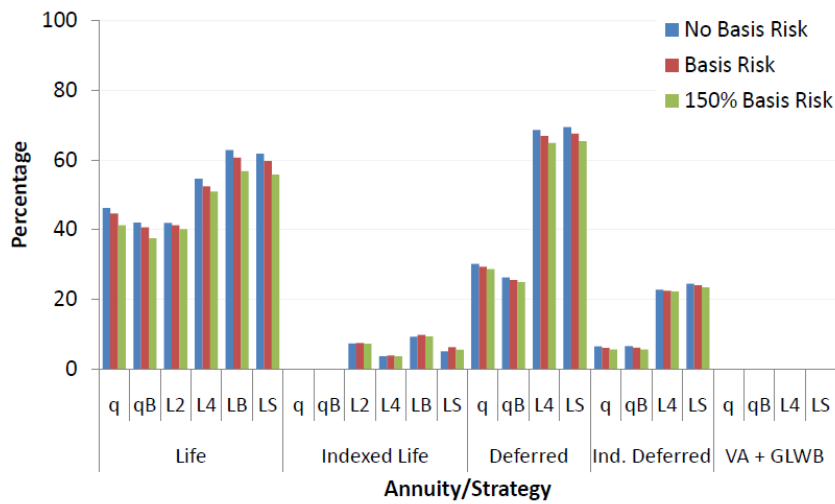


Abbildung 22: Verminderung des ES: Wirksamkeit des Basisrisikos

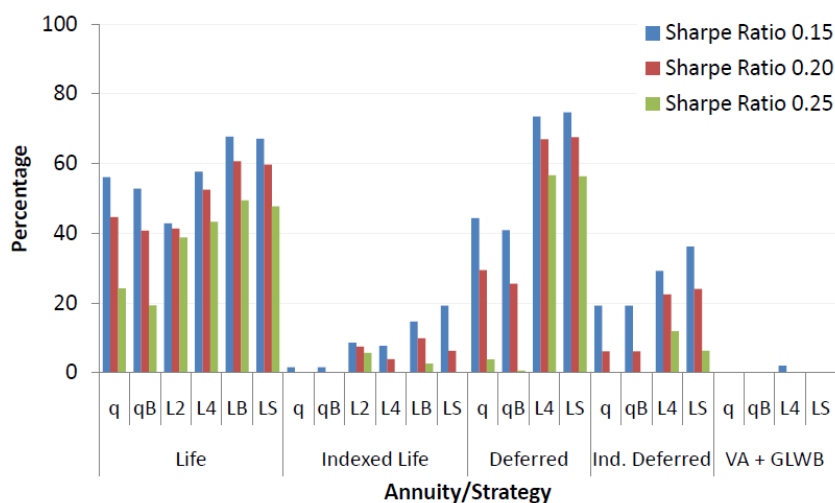


Abbildung 23: Verminderung des ES: Sensitivität zu Sharpe-Ratio

5 Zusammenfassung und Schlussfolgerungen

Diese Seminararbeit hat statische Absicherungsstrategien für das Langlebkeitsrisiko unter der Benutzung von Longevity Derivaten und Bonds für unterschiedliche Rentenprodukte analysiert. Markt- und Sterblichkeitsmodelle wurden entwickelt und mit Hilfe von australische Daten geschätzt, um das Underlyingrisiko zu modellieren. Die Abhängigkeit zwischen Marktvariablen wurde durch einen VECM modelliert. Regime Switching wurde benutzt, um die Volatilität der Marktvariablen zu betrachten. In der Sterblichkeitsmodelle wurde das Basisrisiko auch beobachtet. Statische Absicherungsstrategien wurden mit Hilfe von q-Forwards und Longevity Bonds vergleicht.

Leibrenten bieten Schutz gegen das Langlebkeitsrisiko und den größten Nutzen aus den Absicherungsstrategien. Indexierte Renten haben zusätzlich Inflationsrisiko und das Langlebkeitsrisiko ist nicht so signifikant, falls das Inflationsrisiko nicht absichern werden kann. Variable Renten haben auch ein bedeutendes Marktrisiko und für Renten mit GLWB ist der Schutz gegen das Langlebkeitsrisiko nicht so wirksam bis auf im Fall eines widriges Markt. Außerdem ist das Langlebkeitsrisiko wichtiger für aufgeschobene Renten als für sofortige Renten, da eine Abweichung von der erwartete Sterblichkeit in höherem Alter wahrscheinlicher ist.

Longevity Bonds erwiesen sich als wirksam in der Absicherung des Langlebkeitsrisikos in Leibrenten. Zero Coupon Longevity Bonds ermöglichen mehr Flexibilität bei der Konstruktion einer Absicherungsstrategie und sind in der Lage, eine bessere Ab-

sicherung des Langlebigkeitsrisikos für indizierte Renten zu schaffen. q-Forwards sind auch wirksam in der Absicherung des Langlebigkeitsrisikos, sie haben aber ein signifikantes zusätzliches Basisrisiko im Vergleich zu den Longevity Bonds. Dieses Basisrisiko entsteht aus der Verwendung von Sterblichkeitsraten als Basiswert in q-Forwards anstatt Überlebenswahrscheinlichkeit wie bei den Longevity Bonds.

Es wurde aber beobachtet, dass Basisrisiko eine minimale Auswirkung auf die Absicherung hat. Die Sterblichkeit der Rentner kann mit Hilfe von auf den Bevölkerungssterblichkeit basierten Derivaten und Bonds abgesichert werden. Das Bucketing von q-Forwards nach 5-Jahres-Altersgruppen ist auch effektiv.

Diese Seminararbeit hat gezeigt, dass die Regierungsausgabe von Longevity Bonds die Fähigkeit zum Management von Langlebigkeitsrisiko ermöglichen würde, da diese Maßnahme die Entwicklung des Markts von sterblichkeitgebundenen Wertpapieren helfen würde. Gleichzeitig wurde die Notwendigkeit eines Marktes für die Absicherung der Inflation auch gezeigt.

Wegen der Einfachheit, Kosten und Anwendbarkeit wurde die statische Absicherung anstatt der dynamischen Absicherung gewählt. Trotzdem wäre die Anwendung der dynamischen Absicherung in der Zukunft möglich, wenn die Entwicklung des Marktes es ermöglicht, was es tatsächlich notwendig für variable Renten ist.

Hedgingstrategien lösen das Problem des Langlebigkeitsrisikos nicht komplett und insbesondere die inflationsindexierte und aufgeschobene Renten erfordern zusätzliche Kapitalanforderungen, um die Restrisikos abzusichern.

Literatur

- [1] Sherris, M. and Ngai, A. (2010). Longevity Risk Management for Life and Variable Annuities: Effectiveness of Static Hedging Using Longevity Bonds and Derivatives. Australian School of Business, University of New South Wales.
- [2] Rusconi, R. (2008), National Annuity Markets: Features and Implications. *OECD Working Papers on Insurance and Private Pensions*, 24:10–17
- [3] Ganegoda, A. and Bateman, H. (2008). Australia’s Disappearing Market for Life Annuities. CPS Discussion Paper 01/2008.
- [4] Bauer, D., Kling, A. and Ruß, J. (2008). A Universal Pricing Framework for Guaranteed Minimum Benefits in Variable Annuities. *ASTIN Bulletin* 38: 621–651.
- [5] Holz, D., Kling, A. and Ruß, J. (2007). GMWB For Life: An Analysis of Lifelong Withdrawal Guarantees. Working Paper, Ulm University.
- [6] Hill, T., Visser, D. and Trachtman, R. (2008). Stochastic Pricing for Embedded Options in Life Insurance and Annuity Products. Report by Milliman for the Society of Actuaries.
- [7] Krolzig, H.-M. (1997). *Markov-Switching Vector Autoregressions: Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis*. Springer.
- [8] Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors. *Journal of Economic Dynamics and Control* 12: 231–254.
- [9] Johansen, S. (1995). *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press.
- [10] Wills, S. and Sherris, M. (2008). Integrating Financial and Demographic Longevity Risk Models: An Australian Model for Financial Applications. Working Paper, Australian School of Business, University of New South Wales.
- [11] Stevenson, M. and Wilson, A. (2008). Mortality of Public Sector Scheme Pensioners 2005–2007 Update. Presented to the Institute of Actuaries of Australia 4th Financial Services Forum.