Seminararbeit aus Finanz- und Versicherungsmathematik

Stochastische Kontrolltheorie und ihre Anwendung im Versicherungswesen

Katharina Steiner

20. Juni 2014

Betreuer: Privatdoz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold
Technische Universität Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

In einem Vortrag, den er bei der Royal Statistical Society of London hielt, brachte Karl Borch 1967 folgendes Zitat (siehe Quelle [21]):

> *The theory of control processes seems to be taylor made for the problems which actuaries have struggled to formulate for more than a century. It may be interesting and useful to meditate a little how the theory would have developed if actuaries and engineers had realized that they were studying the same problems and joined forces over 50 years ago. A little reflection should teach us that a highly specialized problem may, when given the proper mathematical formulation, be identical to a series of other, seemingly unrelated problems.*

Es brauchte einige Zeit, bis (1994 und 1995) die ersten Artikel über stochastische Kontrolle im Versicherungswesen erschienen (z.B. Martin-Löf [13], Brockett und Xia [1] oder Browne [2]). Ab diesem Zeitpunkt können wir eine schnelle Entwicklung in diesem Bereich mit einer Reihe an Veröffentlichungen von Soren Asmussen, Michael Taksar, Bjarne Hoejgaard, Hanspeter Schmidli und anderen beobachten. Das Ziel der folgenden Abschnitte ist es eine Einleitung in dieses Gebiet zu bieten und einen aktuellen Überblick der letzten Erkenntnisse mit möglichen Anwendungen. Die gesamte Arbeit basiert auf einem Paper von Christian Hipp [8].
Die drei Teile sind:

- Einführung in das Versicherungsrisiko
- Mögliche Steuervariablen und stochastische Kontrolle
- Optimales Investment für Versicherer

Da wir meistens die Optimierung für einen Erstversicherer betrachten, sollten wir uns auf Probleme mit unendlichem Planungshorizont konzentrieren. Die Hauptzielfunktion wird die Ruinwahrscheinlichkeit unendlicher Zeit sein, aber die meisten hier präsentierten Techniken funktionieren auch mit anderen Zielfunktionen.
Ein großer moderner Trend im Riskomanagement ist das (teilweise) Ersetzen von Risikokapital gegen ausgeklügelte Risikokontrolle. Hier wird man Kontrolle durch Investment in riskante Assets (Kapitalmarkt), Kontrolle durch Rückversicherung, Risikoübernahme, New Business, und Premienfestsetzungen anwenden. In diesem Sinne wie es hier präsentiert wird, ist das mathematische Gebiet Teil von Asset Liability Management, von der dynamischen finanzwirtschaftlichen Analyse und vom holistischen Risiokomanagement im Versicherungswesen.
Stochastische Kontrolle ist in der Finanzwelt seit den bahnbrechenden Veröffentlichungen von Merton ([14] und [15]) gut bewährt. Die Bücher von Fleming und Rishel [3], von Fleming und Soner [4] und von Karatzas und Shreve [12] decken die meisten Probleme und Methoden in diesem Feld ab.

2 Grundlagen

2.1 Stochastische Prozesse - Definition

Definition (Stochastische Prozesse). *Ein stochastischer Prozess $X = (X_t | t \in T)$ ist eine Familie von reellwertigen Zufallsvektoren, die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ definiert sind:*[1]

$$\begin{aligned} X : (\Omega \times \mathbb{T}) &\to \mathbb{R}^n \\ (\omega, t) &\mapsto X_t(\omega) \end{aligned}$$

Die Indexmenge $\mathbb{T}$ ist meist Teilmenge der reellen Zahlen ($\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$) und wird oft als Zeit interpretiert.

- zeitstetige Prozesse: $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{T} = \mathbb{R}_+, \mathbb{T} = [1], ...$
- zeitdiskrete Prozesse: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}, \mathbb{T} = \mathbb{N}, ...$
- skalare Prozesse $n = 1$
- multivariate Prozesse $n > 1$

Definition (Filtration). *Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}$ von Sigmaalgebren, die $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset ... \subset \mathcal{F}_T$ erfüllt, nennt man eine Filtration. In diesem Fall nennt man $\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}$ auch einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.*[2]

Definition (adaptiert). [2] *Ein stochastischer Prozess $Y = (Y_t)_{t=0,...,T}$ ist adaptiert bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,...,T}$, wenn jedes $Y_t \mathcal{F}_t$-messbar ist.*[2]

Definition (vorhersehbar). *Ein stochastischer Prozess $(Z_t)_{t=0,...T}$ heißt vorhersehbar bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0,...T}$, wenn jedes Z_t $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar ist.*[2]

2.2 Klassen von stochastischen Prozessen

Eine Analyse von stochastischen Prozessen in dieser Allgemeinheit ist nicht sinnvoll. Daher betrachtet man spezielle Klassen von stochastischen Prozessen:

- Folgen von unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen $(X_t | t \in \mathbb{N})$
- Martingale (im diskreten Fall)
- Markov-Ketten
- Wiener Prozesse (Brownsche Bewegung)
- Erneuerungs-Prozesse
- (schwach) stationäre Prozesse: bestimmte Eigenschaften (Verteilung, Momente) der Zufallsvariablen X_t sind unabhängig von der Zeit t. Diese Annahme erleichtert die Schätzung von Parametern und die Prognose.
- ...

[1] Scherer, 2013
[2] Föllmer, Schied, 2011

2.2.1 Martingal

In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist ein Martingal ein stochastischer Prozess, bei dem der bedingte Erwartungswert einer Beobachtung gleich dem Wert der vorigen Beobachtung ist.

Definition (Martingal im diskreten Fall). *Ein stochastischer Prozess $M = (M_t)_{t=0,...,T}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), Q)$ heißt Martingal, wenn* [3]

- *M ist adaptiert*
- $\mathbb{E}_Q[|M_t|] < \infty, \quad \forall t$
- $\mathbb{E}_Q[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ *für* $0 \leq s \leq t \leq T$

Als Submartingal bezeichnet man einen adaptierten und integrierbaren stochastischen Prozess X_t, der im Gegensatz zum Martingal tendenziell steigt:

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ für alle } s < t$$

Dementsprechend ist ein Supermartingal ein adaptierter und integrierbarer stochastischer Prozess X_t, der tendenziell fällt:

$$E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s \text{ für alle } s < t$$

2.2.2 Markov-Ketten

Markov-Ketten sind Prozesse mit endlichem Gedächtnis: die zukünftige Entwicklung des Prozesses hängt nur von der Gegenwart und nicht von der Vergangenheit ab.

Definition (Markow-Kette). *Bei einer Folge X_n mit $n = 0, 1, ..., N$ von diskreten Zufallsvariablen und mit Zustandsraum $M = e_0, e_1, ..., e_N$, der also abzählbar viele Zustände enthält, handelt es sich um eine Markow-Kette, wenn*

$$P(X_{n+1} = e_{n+1}|X_0 = e_0, X_1 = e_1, ..., X_n = e_n) = P(X_{n+1} = e_{n+1}|X_n = e_n)$$

erfüllt ist.

Eine Markow-Kette wird bestimmt durch ihren Zustandsraum, ihre Anfangsverteilung, und ihre Übergangswahrscheinlichkeiten.

2.2.3 Brownsche Bewegung

Eine Brown'sche Bewegung (=Wiener Prozess) ist ein zeitstetiger Prozess mit normalverteilten, unabhängigen Zuwächsen. Diese Prozesse haben viele wichtige Anwendungen, z.B. Finanzmathematik.

Definition (Brown'sche Bewegung). *Ein stochastischer Prozess $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ heißt (Standard-)Wiener-Prozess, wenn die vier folgenden Bedingungen gelten:*

1. *$W_0 = 0$ (P-fast sicher).*

[3] Föllmer, Schied, 2011

2. *Für gegebene Zeitpunkte* $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$ *sind die Zuwächse* $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_m} - W_{t_{m-1}}$ *stochastisch unabhängig. Der Wiener-Prozess hat also unabhängige Zuwächse.*

3. *Für alle* $0 \leq s < t$ *gilt* $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$*. Die Zuwächse sind also stationär und normalverteilt mit Erwartungswert Null und Varianz* $t - s$*.*

4. *Die einzelnen Pfade sind (P-)fast sicher stetig.*

Der vierte Punkt kann auch aus der Definition insofern gestrichen werden, als sich mit dem Stetigkeitssatz von Kolmogorow-Tschenzow zeigen lässt, dass es unter den obigen Voraussetzungen immer eine fast sicher stetige Version des Prozesses gibt.

2.2.4 Erneuerungsprozess

Ein Erneuerungsprozess ist ein Zählprozess, dessen Zwischenankunftszeiten unabhängige, identisch verteilte, nichtnegative Zufallsvariablen sind.

$\{N(t), t \geq 0\}$ sei ein Erneuerungsprozess. $N(t)$ ist die Anzahl der Erneuerungen bis zum Zeitpunkt t.
X_i, $i = 1, 2, \ldots c$ seien die Zwischenankunftszeiten, z. B. die Lebenszeiten von Komponenten.
$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird als Erneuerungsfolge bezeichnet. Ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung werde mit F bezeichnet. Es gilt $F(t) = P(X_i \leq t)$.
S_n ist der Zeitpunkt der n-ten Erneuerung. Dieser stochastische Prozess $\{S_n, n = 0, 1, \ldots\}$ erfüllt

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_0 \equiv 0.$$

Die Verteilung von S_n werde mit F_n bezeichnet.
Die Äquivalenz der Beschreibung über$N(t)$ und S_n kommt zum Ausdruck in der grundlegenden Beziehung $\{N(t) \geq n\} = \{S_n \leq t\}$.
S_n ist Summe identisch verteilter, unabhängiger Zufallsvariablen, daher ist F_n die n-fache Faltung der Verteilung F, und es gilt:

$$\begin{aligned} P(N(t) = n) &= P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t) \\ &= F_n(t) - F_{n+1}(t) \end{aligned}$$

Die mittlere Anzahl der Erneuerungen im Zeitintervall $(0, t)$ heißt Erneuerungsfunktion und wird mit M bezeichnet. Es gilt

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} n\,[F_n(t) - F_{n+1}(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t).$$

2.2.5 Poisson-Prozess

Ein Poisson-Prozess ist ein nach Siméon Denis Poisson benannter stochastischer Prozess. Er ist ein Erneuerungsprozess, dessen Zuwächse poissonverteilt sind.

Die Verteilung der Zuwächse hat einen Parameter λ, dieser wird als Intensität des Prozesses bezeichnet, da pro Zeiteinheit genau λ Sprünge erwartet werden (Erwartungswert der Poissonverteilung ist ebenfalls λ). Die Höhe jedes Sprunges ist eins, die Zeiten zwischen den Sprüngen sind exponentialverteilt. Der Poisson-Prozess ist also ein diskreter Prozess in stetiger (d.h. kontinuierlicher) Zeit.

Definition (Poisson-Prozess)**.** *Ein stochastischer Prozess mit càdlàg-Pfaden über einem Wahrscheinlichkeitsraum* $[\Omega; \mathfrak{A}; \mathbb{P}]$ *heißt (homogener) Poisson-Prozess* $P_{\lambda,t}$*, mit Intensität* λ *und* $t \in [0; \infty)$*, falls folgende drei Bedingungen erfüllt sind:*

- $P_{\lambda,0} = 0 \quad (\mathbb{P} - f.s.)$
- $P_{\lambda,t} - P_{\lambda,s} \sim \mathcal{P}_{\lambda\cdot(t-s)} \, \forall \, s < t$. *Dabei bezeichnet* $\mathcal{P}_{\lambda\cdot(t-s)}$ *die Poisson-Verteilung mit Parameter* $\lambda \cdot (t - s)$.
- *Sei für* $n \in \mathbb{N}$ *eine Folge* $0 < t_1 < \ldots b < t_n$*gegeben. Dann ist die Familie* $\langle P_{\lambda,t_i} - P_{\lambda,t_{i-1}} \mid 2 \leq i \leq n \rangle$ *von Zufallsvariablen stochastisch unabhängig.*

Ein paar **Eigenschaften**:

- Ein Poisson-Prozess ist offenbar ein stochastischer Prozess mit unabhängigen Zuwächsen.
- Ein homogener Poisson-Prozess ist ein Markow-Prozess.
- Der Zeitraum zwischen zwei Zuwächsen, also $\min \{t \in [0; \infty) | P_{\lambda,t} = n + 1\} - \min \{s \in [0; \infty) | P_{\lambda,s} = n\}$, $n \geq 0$ ist exponentialverteilt mit dem Parameter λ.
- Ist $P_{\lambda,t}$ ein Poisson-Prozess, so ist $\hat{P}_{\lambda,t} = P_{\lambda,t+s} - P_{\lambda,s} \;\; \forall 0 < s < t$ wieder ein Poisson-Prozess, d. h. die Zuwächse homogener Poisson-Prozesse stationär.
- Für den Erwartungswert und Varianz gilt $\mathrm{E}(P_{\lambda,t}) = \mathrm{Var}(P_{\lambda,t}) = \lambda \cdot t$.

Zusammengesetzter Poisson-Prozess
Ist N_t ein Poisson-Prozess mit Intensität μ sowie $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen unabhängig von N_t, so wird der stochastische Prozess

$$X_t := \sum_{n=1}^{N_t} Y_n$$

als zusammengesetzter Poisson-Prozess bezeichnet. Wie der ursprüngliche Poisson-Prozess ist auch X ein Sprungprozess unabhängiger Zuwächse und exponential(μ)-verteilter Abstände zwischen den Sprüngen, mit Sprunghöhen, die nach Y verteilt sind. Gilt $Y_1 = 1$ f.s., so erhält man wieder einen Poisson-Prozess.
Für den Erwartungswert gilt die Formel von Wald (nach dem Mathematiker Abraham Wald),

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(N_t)\mathbb{E}(Y_1) = \mu t \mathbb{E}(Y_1).$$

3 Einführung in das Versicherungsrisiko

3.1 Das Lundberg Risikomodell

Hier betrachten wie das technische Risiko, welches durch die Zufälligkeit der Schadenhöhe und Häufigkeit der Schäden entsteht. Ein klassisches Modell ist das Lundberg Modell für den Risikoprozess, welches einen zusammengesetzten Poissonprozess für den Schaden verwendet:

$$R(t) = s + ct - S(t),$$
$$S(t) = X_1 + ... + X_{N(t)}$$

$N(t)$ ist ein homogener Poissonprozess mit der konstanten Intensität λ und unabhängigen Schadenshöhen $X_1, X_2, ...$, welche die Verteilung Q (der Schadenshöhenverteilung) haben und unabhängig von $N(t), t \geq 0$ sind. s ist der anfängliche Überschuss und c die konstante Prämienintenstät.
Der Prozess ist von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, X_2, ..., W_1, W_2, ...$ mit $X_i \sim Q$, $W_i \sim Exp(\lambda)$ generiert, wo W_i die Zwischenankunftszeit zwischen Schaden X_{i-1} und X_i ist, wenn $i \geq 2$, und W_1 ist die Wartezeit bis zum ersten Schaden. Dann kann $N(t)$ geschrieben werden als

$$N(t) = max\{k : W_1 + ... + W_k \leq t\}.$$

Der Schaden X_i tritt zur Zeit $T_i = W_1 + ... + W_i, i \geq 1$ auf. Der Prozess $R(t)$ hat unabhängige stationäre Inkremente, im speziellen ist er Markov nach der von $R(t)$ generierten natürlichen Filtration F_t im folgenden Sinn: für jede von $R(u), u \geq t$ erzeugten Menge A in der Sigmaalgebra hängt die bedingte Wahrscheinlichkeit $P\{A|F_t\}$ nur von $R(t)$ alleine ab,

$$P\{A|F_t\} = P\{A|R(t)\}.$$

Dies ist das Standardmodell für die Schadenversicherung, einfach genug, um die Wahrscheinlichkeiten von Interesse zu kalkulieren, jedoch zu simpel um realistisch zu sein. Es inkludiert weder die Zinsen, welche am Startkapital verdient werden, noch das Langzeitgeschäft mit den Forderungen, die lang nach dem Auftreten des Schadens angesiedelt sind, noch die Zeitabhängigleit oder sogar Zufälligkeit des Preminieneinkommes oder die Größe des Portfolios (was entsprechend zu stochastischen Größen $c(t)$ und $\lambda(t)$ führt). Aber das Lundberg Modell bleibt dennoch eine attraktive Möglichkeit, da es zwei wichtige Gründe für große Verluste seperiert und modelliert: die Häufigkeit der Schäden und die Größe der Schäden. Die meisten der für das Lundberg Modell entwickelten Techniken sind für realistischere und allgemeinere Risikoprozesse nützlich, wie das Sparre-Anderson Modell oder der Markov-Risikoprozess.

3.2 Alternativen

Wie bereits erwähnt sind das Sparre-Anderson Modell oder der Markov modellierte Risikoprozess andere Modelle, welche im Versicherungswesen behandelt werden. In beiden Modellarten bleiben die Schäden X_i iid unabhängig vom Ankunftsprozess $N(t)$ der Schäden, welcher im Sparre-Anderson Modell ein Erneuerungsprozess ist

$$N(t) = max\{k : W_1 + ... + W_k \leq t\}$$

mit iid positiven Zufallsvariablen W_i, welche unabhängig von der Abfolge der Schadengrößen X_i sind. Ein Sparre-Anderson Risikomodell hat die Parameter s, c, Q, R, wobei R die

Verteilung der Zwischenankunftszeiten W_i ist. In diesem Modell ist $R(t)$ kein Markov-Prozess mehr; um den Markov-Prozess zu erhalten muss man den Zustandsraum vergrößern. Wenn $T(t)$ die verstrichene Zeit seit dem letzten Schaden ist, dann ist $(R(t), T(t))$ ein Markov-Prozess.
Im Markov-Risikomodell betrachtet man einen zeitstetigen, homogenen Markov-Prozess $M(t)$ im Zustandsraum {1,...,I } und mit den Intensitäten $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_I$ verwendet man den Prozess $\lambda(t) = \lambda_{M(t)}$ als stochastische Intensität von einem inhomogenen Poisson-Prozess $N(t)$. Hier haben wir die Parameter $s, c, Q, \lambda_1, ..., \lambda_I, b_{ij}, i, j = 1, ..., I$, wobei b_{ij} die Übergangsintensitäten vom Markovprozess $M(t)$ sind. In diesem Modell ist also $R(t)$ nicht Markov, während $(R(t), \lambda(t))$ ein Markov-Prozess ist.
Eine simple Erweiterung des Lundberg-Risikoprozesses ist die Anwendung von stetigen Zinsen, wobei die Reserve Zinsen mit konstanter Rate r verdient. In diesem Prozess sind die Sprünge dieselben wie im Lundberg-Prozess und zwischen den Schäden entwickelt sich der Prozess mit der Dynamik:

$$R'(t) = c + rR(t);$$

3.3 Ruinwahrscheinlichkeit

***Begriff**: Die Ruinwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit für den Eintritt des technischen Ruins eines Versicherungsunternehmens, d.h. des Ereignisses, dass der aggregierte realisierte Gesamtschaden eines Versicherungskollektivs die vorhandene Ausstattung an Sicherheitskapital zuzüglich der vereinnahmten Kollektivprämie (Risikoprämie) übersteigt. Wird die Wahrscheinlichkeit dafür betrachtet, dass der Ruin am Ende einer gegebenen Periode eingetreten ist, wird von einperiodischer Ruinwahrscheinlichkeit gesprochen.*[4]

Ein klassisches Risikomaß ist die Ruinwahrscheinlichkeit unendlicher Zeit, welche wie folgt definiert wird:

$$\psi(s) = P\{R(t) < 0 \quad \text{für ein} \quad t \geq 0\}$$

was gleich eins ist, so lange $c \leq \lambda E[X_1]$ (kein Sicherheitszuschlag). Mit Sicherheitszuschlag

$$c > \lambda\mu$$

(eine Bedingung die wir stillschweigend die ganze Arbeit hindurch annehmen) haben wir $R(t) \to \infty$ und die Ruinwahrscheinlichkeit erfüllt die folgende Integal-Differentialgleichung

$$0 = \lambda E[\psi(s - X) - \psi(s)] + c\psi'(s), s \geq 0 \tag{1}$$

(Grandell [6]).

Für exponentielle Schadenshöhen mit Dichte

$$f(x) = \theta exp(-\theta x), x > 0,$$

beträgt sie Ruinwahrscheinlichkeit

$$\psi(s) = \frac{\lambda\mu}{c} exp(-Rs), \tag{2}$$

wobei $\mu = 1/\theta$ die mittlere Schadenshöhe und $R = (c - \lambda\mu)/(c\mu)$ der Anpassungskoeffizient des Problems ist, was die positive Lösung r der Lundberg-Gleichung

$$\lambda + rc = \lambda E[exp(rX)] \tag{3}$$

[4]Springer Gabler Verlag (Herausgeber), Gabler Wirtschaftslexikon

ist.
Der Anpassungskoeffizient R ist ein Maß für das Risiko in dem Risikoprozess. R hängt von zwei Faktoren ab:

1. von der Gesamtschadenhöhe
2. von der Höhe der Pämien

Für die folgenden Teile ist es wahrscheinlich hilfreich sich zu erinnern wie Gleichung (2) aus Gleichung (1) abgeleitet werden kann. Wir betrachten die Überlebenswahrscheinlichkeit $\delta(s) = 1 - \psi(s)$, für die $\delta(s) = 0$ für $s < 0$ und

$$0 = \lambda(g(s) - \delta(s)) + c\delta'(s), s \geq 0, \tag{4}$$

wobei

$$g(s) = E[\delta(s - X)] = \int_0^s \delta(s - x)\theta e^{\theta x} dx = \int_0^s \delta(x)\theta e^{-\theta(s-x)} dx$$

Es ist leicht zu sehen, dass $g(s)$ auf der Menge $\{s \geq 0\}$ die Differentialgleichung

$$g'(s) = \theta(\delta(s) - g(s)),$$

erfüllt. In Folge dessen hat die Funktion $\delta(s)$ auf der Menge $\{s \geq 0\}$ eine stetige zweite Ableitung $\delta''(s)$ für die gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(g'(s) - \delta'(s) + c\delta''(s) \\ &= \lambda\theta(\lambda(s) - g(s)) - \lambda\delta'(s) + c\delta''(s) \\ &= c\theta\delta'(s) - \lambda\delta'(s) + c\delta''(s). \end{aligned}$$

Diese lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten hat eine generelle Lösung der Form

$$\delta(s) = C_1 + C_2\, exp(-Rs)$$

da $z = 0$ und $z = -R$ die Lösungen zu den charakteristischen Gleichungen

$$0 = (c\theta - \lambda)z + cz^2$$

sind.
Wenn wir $\delta \to 1$ für $s \to \infty$ betrachten, erhalten wir $C_1 = 1$. Von (4) im Punkt $s = 0$ bekommen wir $\lambda\delta(0) = c\delta'(0)$ oder $\lambda(1 + C_2) = -cRC_2$ oder schießlich

$$-C_2 = \frac{\lambda}{cR + \lambda} = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Im Markov-Risikomodell, hängt die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s, i)$ vom anfänglichen Überschuss und dem anfänglichen Wert der Prozesses $\lambda(t) : \lambda(0) = \lambda_i$ ab. Die Funktionen $\psi(s, i)$ erfüllen das folgende zusammenhängende Sytsem von Integro-Differentialgleichungen erster Ordung:

$$0 = \lambda_i E[\psi(s - X, i) - \psi(s, i)] + c\psi_s(s, i) + \sum_{j=1}^{I} b_{ij}\psi(s, j), s \geq 0, i = 1, ..., I.$$

Im Sparre-Andersen Modell ist die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s) = \psi(s, 0)$ von einer Funktion $\psi(s, t)$ abgeleitet, wobei s der anfängliche Überschuss und t die augenblickliche Zeit seit dem letzten Schaden ist. Wenn die Wartezeiten W_i eine stetige Dichte $f(x)$ haben, erfüllt die Funktion $\psi(s, t)$ die folgende Integro-Differentialgleichung:

$$0 = \frac{f(t)}{1 - F(t)} E[\psi(s - X, t) - \psi(s, t)] + c\psi_s(s, t) + \psi_t(s, t), s \geq 0, t \geq 0.$$

Im Lundberg-Risikoprozess mit konstantem Zins erfüllt die die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s)$ die Intergo-Differentialgleichung

$$0 = \lambda E[\psi(s - X) - \psi(s)] + (c + rs)\psi'(s), s \geq 0.$$

Diese Integro-Differentialgleichungen sind mit den infinitesimalen Mantellinien des zu Grunde liegenden Prozesses hergeleitet (siehe unten). Beim Rest dieses Abschnitts werden wir uns auf den Lunberg-Riskioprozess beschränken.

3.4 Asymptotik der Ruinwahrscheinlichkeiten

Gleichung (2) zeigt das typische Verhalten von Ruinwahrscheinlichkeiten für kleine Schadenshöhen, für die der Anpassungskoeffizient existiert,

$$\psi(s) \sim Cexp(-Rs)$$

mit $C > 0$, und wo $a(s) \sim b(s)$ bedeutet, dass $a(s)/b(s) \to 1$ bedeutet. Diese Beziehung bleibt bestehen, z.B., wenn

$$r_0 = sup\{r : E[exp(rX)] < \infty\} > 0$$

und $lim_{r \to r_0} E[exp(rX)] = \infty$. (siehe Rolski et al. ([17], chapter 5.4)).
Für große Schäden mit Heavy-Tailed-Verteilung (für wleche $r_0 = 0$) ist das Verhalten komplett anders: für Pareto-Schäden mit Dichte $f(x) = ax^{-(a+1)}, x > 1, a > 1$ haben wir:

$$\psi(s) \sim Cs^{-(a-1)}, s \to \infty,$$

mit einer positiven Konstante C. Das Verhalten ist auch typisch für Heavy-Tailed-Schadenshöhen-Verteilungen Q (genauer gesagt für alle subexponentiellen Verteilungen). Wir erhalten

$$\psi(s) \sim C \int_s^\infty Q(x, \infty)dx.$$

Der Unterschied zwischen den beiden Fällen ist sichtbar, wenn man das Startkapital erhöht, um die Ruinwahrscheinlichkeit zu halbieren. Im Fall der exponentiellen Schäden ist das erhöhte Startkapital $s_1 = s + \log(2)/R$, im Fall der Pareto-Schäden:

$$s_1 \sim 2^{1/(a-1)}s.$$

Einen kompletten Überblick über Ruinwahrscheinlichkeiten unendlicher Zeit für das Lundberg-Modell findet man in Rolski et al.[17].

4 Mögliche Steuervariablen und stochastische Kontrolle

Wir nehmen an, dass eine Versicherungsgesellschaft das Risiko in einem Portfolio an Schäden, welches durch einen Lunberg-Risikoprozess mit den Parametern c, λ und Q modelliert wird, regelt. Es gibt eine Sammlung von möglichen Maßnahmen, welche sehr gut für das Risikomanagement geeignet sind: Rückversicherung, Investment, volume control (über die Prämienfestsetzung), Auswahl der Portfolios (über Kombinationen aus den gegebenen Risikoportfolios mit anderen Risiken, welche abgeschrieben werden können), und die Kombiantion aus all diesen Dingen. Hier beschläftigen wir uns mit dem dynamischen Risikomanagement, die Maßnahmen werden an jedem Zeitpunkt ausgewählt und verändert - angepasst an die Risikoposition der Gesellschaft. Wir werden nur Aktionen behandeln, welche eine Kontrollvariable enthalten und versuchen, die optimale (hinsichtlich eines gegebenen Objekts) dynamische Strategie für diese ausgewählte zu finden. D.h. für jede Steuervariable definieren wir ein stochastisches Kontrollproblem, welches wir zu lösen versuchen.

4.1 Mögliche Steuervariablen

4.1.1 Optimales Investment

Hier betrachten wir ein riskantes Finanzgut (oder eine endliche Anzahl von riskanten Gütern), in das der Versicherer investieren kann, und ein risikoloses Finanzgut, ein Bankkonto, welches den Zinssatz r abwirft. Zu jedem Zeitpunkt t wird der Versicherer mit aktuellem Vermögen $R(t)$ einen Betrag $A(t)$ in das riskante Finanzgut investieren, und was am Bankkonto übrig bleibt bringt (kostet) den Zinssatz r, wenn $R(t) - A(t) > 0$ (wenn $R(t) - A(t) < 0$). Der Einfachheit halber verwenden wir das klassische Samuelson-Modell (logarithmische Brown'sche Bewegung) für die Dynamiken des Assetpreises $Z(t)$:

$$dZ(t) = aZ(t)dt + bZ(t)dW(t), Z(0) = z_0,$$

wobei $W(t)$ ein Standard-Wiener-Prozess ist. Wenn $\theta(t) = A(t)/Z(t)$ die Anzahl der besessenen Aktien zum Zeitpunkt t sind, dann hat die totale Position des Versicherers die folgenen Dynamiken:

$$dR(t) = rR(t)dt + cdt - dS(t) + \theta(t)dZ(t) - r\theta(t)Z(t)dt, R(0) = s,$$

oder

$$dR(t) = rR(t)dt + cdt - dS(t) + A(t)((a - r)dt + bdW(t)), R(0) = s.$$

Um den Aufbau und die Notation zu vereinfachen, sollten wir uns auf den Fall $r = 0$ einschränken.
Wir sollten für alle möglichen Handelstrategien $\theta(t)$, welche - als stochastische Prozesse - $F(t)$-vorhersehbar sind, $t \geq 0$ beachten, wobei $F(t)$ die erzeugte Filtration von $Z(t)$ und $S(t), t > 0$ ist. Für die Auswahl von $\theta(t)$ können wir also das Wissen über alle Aktienpreise und Schäden vor der Zeit t verwenden, aber nicht das Wissen zum Zeitpunkt t, welches vielleicht die Größe des Schadens ist, der zur Zeit t eintritt. Es gibt keine Budgetbedingung wie $\theta(t)Z(t) \leq R(t)$, man kann sich einen beliebigen Betrag an Geld ausborgen und in riskante Finanzgüter investieren. Wir sollen also Abwicklungskosten vernachlässigen und Beteiligungen jeder Größer erlauben (auch infinitesimale).

4.1.2 Optimale proportionierte Rückversicherung

In einem proportionalen Rückversicherungsvertrag wird jeder einzelne Schaden der Größe X zwischen Erst- und Rückversucherer gemäß eines Proportionalitätsfaktors a geteilt:

der Versicherer zahlt aX, der Rückversicherer zahlt $(1-a)X$. Dafür zahlt der Versicher eine Rückversicherungsprämie $h(a)$ an den Rückversicherer. Wir gestatten eine stetige Anpassung des Proportionalitätsfaktors: $a(t)$ ist F_t-vorhersehbar. Unter der Strategie $a(t)$ ist der Risikoprozess des Erstversicherers gegeben durch

$$R(t) = s + ct - \int_0^t h(a(v))dv - \sum_{i=1}^{N(t)} a(T_i)X_i, t \geq 0.$$

Die gewöhnliche Premien-Regel $h(a)$ ist das Erwartungswertprinzip:

$$h(a) = a\rho\lambda E[X]$$

mit $\rho > 1$. Wenn $c \geq \rho\lambda E[x]$ und wenn der Erstversicherer sein Risiko minimieren will, dann wird er $a(t) = 0$ wählen und gibt somit das gesamte Risiko an den Rückversicherer. Um diese uninteressante Situation auszuschließen sollten wir immer vorraussetzen, dass Rückversicherung teuer ist: $c < \rho\lambda E[X]$.

4.1.3 Optimale unlimitierte XL Rückversicherung

In der excess of loss (XL) Rückversicherung wird jeder Schaden der Größe X zwischen Erst- und Rückversicherer in Abhängigkeit eines Nettoschadenselbstbehaltes von $0 \leq b \leq \infty$ geteilt: der Versicherer zahlt $min(X, b)$, und den Rückversicherer zahlt $(X-b)^+ = max\{X-b, 0\}$. Dafür zahlt der Versicherer eine Rückversicherungsprämie $h(b)$ an der Rückversicherer. Wir gestatten eine stetige Anpassung des Proportionalitätsfaktors: $b(t)$ ist F_t-vorhersehbar. Unter der Strategie $b(t)$ ist der Risikoprozess des Erstversicherers gegeben durch

$$R(t) = s + ct - \int_0^t h(b(v))dv - \sum_{i=1}^{N(t)} min\{b(T_i), X_i\}, t \geq 0.$$

Die mögliche Premien-Regel $h(b)$ ist wieder das Erwartungswertprinzip:

$$h(b) = \rho\lambda E[(X-b)^+]$$

mit $\rho > 1$. Auch hier sollten wir vorraussetzen, dass Rückversicherung teuer ist: $c < \rho\lambda E[X]$. Ein anderes Prämien-prinzip wäre das Varianzprinzip

$$h(b) = \lambda E[(X-b)^+] + \beta\lambda E[((X-b)^+)^2],$$

was dem Ende der Verteilung der Schadenshöhe mehr Gewicht verleiht, oder das Standardabweichungsprinzip

$$h(b) = \lambda E[(X-b)^+] + \beta\sqrt{\lambda E[((X-b)^+)^2]}.$$

Im Allgemeinen ist die teure Rückversicherung die Situation in welcher $c < h(0)$.

4.1.4 Optimale XL-Rückversicherung

In der Praxis sind XL-Rückversicherungsverträge mit einer Konstanten $0 \leq L \leq \infty$ begrenzt, was zur folgenden Teilung des Schadens führt: der Rückversicherer zahlt $min\{(X-b)^+, L\}$ und der Erstversicherer zahlt was übrig ist: $g(X, b, L) = min\{X, b\} + (X-b-L)^+$. Dafür zahlt der Erstversicherer eine Rückversicherunsprämie $h(b, L)$.

Unter einem dynamischen XL-Rückversicherungsvertrag mit der Strategie $(b(t), L(t))$ hat der Versicherer folgenden Risikoprozess:

$$R(t) = s + ct - \int_0^t h(b(v), L(v))dv - \sum_{i=1}^{N(t)} g(b(T_i), L(T_i)).$$

Rückversicherung ist teuer falls $c < h(0, \infty)$. Ein mögliches Prämienschema ist das Erwartungswertprinzip

$$h(b, L) = \rho\lambda E[min\{(X-b)^+, L\}^2],$$

das Varianzprinzip

$$h(b, L) = \lambda E[min\{(X-b)^+, L\}] + \beta\lambda E[min\{(X-b)^+, L\}^2]$$

oder das Standardabweichungsprinzip.
Um das Risiko zu minimieren wird der Versicherer $L(t) = \infty$ wählen, wenn er es sich leisten kann. $L(t) < \infty$ ist also nur eine vernünftige Wahl für ihn, wenn das Ende der Schadenshöhenverteilung für die Rückversicherungsprämie von Bedeutung ist, was im Varianz- oder Standardabweichungsprinzip der Fall ist.

4.1.5 Optimale Premienkontrolle

Ein Versicherer kann seinen Geschäftsumfang über das Festsetzen der Premienrate c kontrollieren. Umso höher die Prämienrate c ist, umso kleiner ist die Zahl von Verträgen in seinem Portfolio und das wird wiederum die Schadensintensität λ verringern. Dies wird von einer nicht-steigenden Funktion $\lambda(c)$ modelliert: wenn $c(t)$ die momentane berechnete Premienrate ist, dann ist $\lambda(c(t))$ die momentane Intesität des Schadenprozesses. Ein realistisches Modell hat $\lambda(\infty) = 0$ und um ein nicht-triviales Risikominimierungs-Problem zu erhalten, muss man die Rahmenbedingungen ein bisschen ändern. Anderenfalls würde der Versicherer sein Riskio auf null reduzieren, indem er die Premienrate unendlich wählt. Eine Möglichkeit ist die Einführung von Kosten des Kapitals, d.h. für das Startkapital muss eine Zinsrate ρ stetig gezahlt werden.

4.1.6 Optimales New Business

Dies ist ein Kontrollproblem für einen Versicherer, der sein Risiko mit einem gegebenen Portfolio kontrolliert, indem er ein angepasstes Verhältnis des Geschäftes in einem zweiten, unanhängigen Portfolio schreibt. Wenn $R(t)$ und $R_1(t)$ zwei unabhängige Portfolios sind, welche beide als Lundberg-Risikoprozesse mit Parametern λ, c, Q und entsprechend λ_1, c_1, Q_1 modelliert werden, und wenn $b(t)$ die Proportion ist, welche zur Zeit t im Portfolio $R_1(t)$ geschrieben ist, dann besteht die totale Position des Versicherers aus dem Prämieneinkommen bis zur Zeit t, äquivalent zu

$$ct + \int_0^t \lambda_1 b(u)du,$$

Die Schäden, die bis zum Zeitpunkt t gezahlt wurden, sind $S(t) = X_1 + ... + X_{N(t)}$ für das erste Portfolio mit zusammengesetzter Poissonverteilung mit Parametern λt und Q und $S_1(t)$ für das zweite Portfolio mit momentaner Schadensintensität $\lambda_1 b(t)$ und Schadenshöhenverteilung Q_1. Für praktische Anwendungen muss man annehmen, dass $b(t) \geq 0$(kein Leerverkauf im Versicherungsgeschäft) und $b(t) \leq 1$ (der größt mögliche geschriebene Umfang ist $R_1(t)$).

4.2 Stochastische Kontrolle

Eine der meist untersuchten klassischen Problematiken im Finanzwesen ist Mertons optimales Investment und Konsum Modell. In einfachster Form sieht dies folgendermaßen aus.
Ein Investor hat das Startkapital r_0, er kann einen Teil seines Vermögens dynamsich konsumieren und einen anderen Teil davon in jegliches riskante Finanzgut investieren mit dem als Brown'sche Bewegung modellierten Preisprozess:

$$dX(t) = X(t)(adt + bdW(t)), X(0) = x_0.$$

Was am Bankkonto übrig bleibt bringt einen konstanten Zins mit Rate r ein. Wenn $A(t)$ der investierte Betrag ist und $c(t)$ die Rate der Konsumation zum Zeitpunkt t, dann hat das Vermögen $R(t)$ die Dynamik

$$dR(t) = A(t)(adt + bdW(t)) + (R(t) - A(t))rdt - c(t)dt, R(0) = r_0.$$

Man ist an der optimalen Strategie $(A(t), c(t))$ interessiert, welche den erwarteten ansteigenden Nutzen des Konsums maximiert

$$E\left[\int_0^\tau \exp^{-\rho t} u(c(t))dt\right]$$

wobei $\tau = inf\{t : \quad R(t) < 0\}$ die Ruinzeit für den Investor ist, $\rho > 0$ ist die subjektive Zinsrate und $u(t) = x^\gamma, \gamma < 1$ ist eine spezielle Nutzenfunktion. Diese Problematik ist über die Dynamiken der riskanten Asstes, über die zwei Kontrollvariablen $A(t)$ und $c(t)$ und über die Zielfunktion, welche maximiert wird, spezifiziert.

4.2.1 Zielfunktionen

Um ein Optimierungsproblem geeignet zu bestimmen muss man den Planungshorizont und die Menge, welche maximiert werden soll, spezifizieren. Es gibt den Fall des endlichen Horizonts, wo die Optimierung auf einem begrenzten Intervall $[0, T]$ stattfindet und den Fall des unendlichen Horizonts. Im endlichen Fall, kann die Zielfunktion im Allgemeinen als Summe von zwei Komponenten angeschrieben werden: die laufenden Kosten und die finalen Kosten. Wenn $\sigma(t)$ die Strategie mit den Werten in einem Handlungsraum Σ ist, dann sieht die allgemeine zu maximierende Zeilfunktion so aus:

$$E\left[\int_0^{\tau\wedge T} u(R(t), \sigma(t), t)dt + U(R(T), \sigma(T))\right]$$

wobei τ eine Stoppzeit ist (so wie die Ruinzeit oder Ersteintrittszeit in eine gewisse Region). Im unendlichen Fall besteht eine allgemeine Zielfunktion aus den laufenden Kosten und Grenzkosten

$$E\left[\int_0^{\tau} u(R(t), \sigma(t), t)dt + U(R(\tau), \sigma(\tau), \tau)\right],$$

wobei τ eine unbegrenzte Stoppzeit und $U(R(\tau), \sigma(\tau), \tau)$ Bankrottkosten sein könnten, wenn τ die Zeit des Ruins ist. Für das oben erwähnte Merton Problem unendlichen Horizonts haben wir $U = 0$ und $u(r, \sigma, t) = exp(-\rho t)(c(t))^\gamma, \gamma < 1$. Wenn $c(t)$ ein Dividendensatz ist, dann könnte die Menge

$$E\left[\int_0^{\tau} exp(-\rho t)c(t)^\gamma dt + U(R(\tau))\right]$$

als Wert der Gesellschaft interpretiert werden, wenn $c(t)$ der Dividendensatz und $U(s)$ die Verzugskosten sind, wenn das Endkapital s ist.
Wir sollten uns hauptsächlich mit Ruin-(Überlebens-)wahrscheinlichkeiten befassen, d.h. die laufenden Kosten sind null und $U = 1$, wenn $\tau = \infty, U = 0$ anderenfalls.

4.2.2 Infinitesimale Generatoren

Infinitesimale Generatoren oder Erzeuger L sind für Markov-Prozesse $R(t)$ und für (ausreichend glatte) Funktionen $f(s)$ im Zustandsraum folgendermaßen definiert

$$L_t f(s) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} E[f(R(t+h) - f(t)|R(t) = s],$$

wobei die Funktion$f(s)$ durch den Definitionsbereich D von L beschränkt ist wofür dieser Grenzwert existiert. Wenn der Markov-Prozess zeithomogen ist, dann hängt der Erzeuger nicht von t ab. Offensichtlich ist D linear und L_t ist eine linearer Operator.
In den folgenden Beispielen sind alle Prozesse stationär. Die Definitionsbereiche des Erzeugers werden nicht genau beschrieben, aber es sollte in jedem Fall klar sein, dass er die Menge aller Funktionen $f(s)$ mit beschränkten Ableitungen jeder Ornung enthält.

1. $dR(t) = a(R(t))dt + b(R(t))dW(t) : Lf(s) = a(s)f'(s) + \frac{1}{2}b^2 f''(s)$;
2. $R(t) = s + ct - S(t)$, der Lundberg Risikoprozess: $Lf(s) = \lambda E[f(s-X) - f(s)] + xf'(s)$;
3. $R(t)$ der Lundberg-Risikoprozess mit konstanter Zinsrate r:
   $Lf(s) = \lambda E[d(s-X) - f(s)] + (c+rs)f'(s)$;
4. $(R(t), M(t))$ vom Markov-Risikoprozess:
   $$Lf(s,i) = \lambda_i E[f(s-X,i) - f(s,i)] + cf_s(s,i) + \sum_{j=2}^{I} b_{ij} f(s,j);$$
5. $(R(t), T(t))$ vom Sparre-Andersen Modell:
   $$Lf(s,t) = \frac{f(t)}{1-F(f)} E[f(s-X,t) - f(s,t)] + cf_s(s,t) + f_t(s,t);$$

Im Folgenden sollen wir den infinitesimale Generator auch für einen kontrollierten Risikoprozess brauchen, wo die Kontrollstrategie konstant ist. Also zum Beispiel für ein optimales Investment mit einem konstanten Betrag A in ein riskantes Asset, die vollständige Lage $R(t)$ des Versicherers hat die Dynamik

$$dR(t) = cdt - dS(t) + A(adt + bdW(t)),$$

und so ist der Erzeuger für den Prozess $(R(t), X(t))$ (welcher Markow ist):

$$Lf(s,x) = \lambda E[f(s-X,x) - f(s,x)] + cf_s(s,x) + Aaf_s(s,x) + \frac{1}{2}A^2 b^2 f_{ss}(s,x).$$

Man kann sehen, dass der Erzeuger unabängig von x ist (für eine Brownsche Bewegung hat der Anfangswert keinen Einfluss auf den Return eines Investments) und so werden wir folgende Notation verwenden:

$$Lf(s) = \lambda E[f(s-X) - f(s)] + cf'(s) + Aaf'(s) + \frac{1}{2}A^2 b^2 f''(s).$$

Für proportionale Rückversicherung mit dem konstanten Verhältnis a lautet der Risikoprozess des Versicherers

$$R(t) = s + (c - h(a))t - a \sum_{i=1}^{N(t)} X_i,$$

und der entsprechende Erzeuger

$$Lf(s) = \lambda E[f(s - aX) - f(s)] + (c - h(a))f'(s).$$

Für eine unbegrenzte XL-Rückversicherung mit konstantem Selbstbehalt $b \in [0, \infty]$ ist der Erzeuger

$$Lf(s) = \lambda E[f(s - X \wedge b) - f(s)] + (c - h(b))f'(s),$$

und den allgemeinen Rückversicherungsvertrag $g(X, a)$ mit Rückversciherungsprämie $h(a)$ und dem fixierten Urteilsvektor a lautet der Erzeuger

$$Lf(s) = \lambda E[f(s - g(X, a) - f(s)] + (c - h(a))f'(s),$$

Die Integro-Differentialgleichungen für die Ruintheorie $\psi(s)$ sind alle von der Form

$$L\psi(s) = 0, s \geq 0,$$

wobei L der infinitesimale Generator des zu Grunde liegenden Risikoprozesses ist. Es ist keinesfalls offensichtlich, dass die Funktion $\psi(s)$ im Defintionsbereich von l liegt, aber dieses Problem kann mit dem sogenannten Verifikationsargumentargument behandeln.

4.2.3 Hamilton-Jacobi-Bellman Gleichungen

Die Berechnung der maximalen Zielfunktion und - falls diese existiert - der entsprechenden optimalen Strategie ist eine nicht-triviale Aufabe: der Raum der möglichen Strategien ist viel zu groß (die Menge von allen F_t-vorhersehbarer Prozesse) für eine gänzliche Suche. Es wird eine indirkete Methode angewendet. Das Prinzip hinter der Methode (für den Fall des endlichen Horizonts) basiert auf zwei Beobachtungen: a) die optimale Stategie hängt nur vom anfänglichen Überschuss ab (und der Zeit bis zur Maturität) und b) die optimale Strategie ist durch ihren Wert im Anfangszeitpunkt für jeden anfänglichen Zustand (und jeder Zeit bis zur Maturität) spezifiziert. Allzumal das Konzept jetzt recht klassisch ist und Teil jedes Buchs über stochastische Kontrolle, wird die HJB Gleichung nur ohne Beschreibung, wie sie heuristisch vom Optimierungsproblem hergeleitet wird, gegeben.

Wenn A eine fixierte Handlung aus dem Handlungsraum ist, welche als konstante Strategie $a(t) = A$ aufgefasst wird, dann sollte der kontrollierte Prozess $R^\alpha(t)$ ein zeithomogener Markov-Prozess mit dem infinitesimalen Erzeuger L^A sein. Die HJB Gleichung für ein Optimierungsproblem in diesem Fall, d.h. mit der Wertfunktion $V(s)$ der Form

$$V(s) = \max_{a(.)} E[U(R^\alpha(\tau), a(\tau), \tau],$$

wobei $\tau = inf\{t : R^\alpha(t) < 0\}$ die Ruinzeit des kontrollierten Prozesses (andere Stoppzeiten sind auch möglich), folgendermaßen ausschaut:

$$\max_A L^A V(s) = 0, s \geq 0. \tag{5}$$

Das maximierte $A = A(s)$ in diesem Problem definiert die optimale Strategie: wenn der kontrollierte Prozess im Zustand s ist, dann ist die optimale Handlung $A(s)$.

Wir betrachten, als erstes ein Beispiel ohne Optimierung, einen Wiener Prozess mit positivem Drift a und Diffusionskonstante $b \neq 0$,

$$dR(t) = adt + bdW(t),\ t \geq 0,\ R(0) = s.$$

Wir wollen die Ruinwahrscheinlichkeit ermitteln:

$$\psi(s) = P\{R(t) < 0 \quad für \quad t|R(0) = s\}, s > 0.$$

Der Prozess $R(t)$ dat den infinitesimalen Generator

$$Lf(s) = af'(s) + \frac{1}{2}b^2 f''(s). \tag{6}$$

Für ein kurzes Zeitintervall von 0 bis dt wird vielleicht ein Ruin stattfinden in $[0, dt]$ - was mit einer Wahrscheinlichkeit von $o(dt)$ passiert - oder der Ruin tritt nach dt mit der Wahrscheinlichkeit $\psi(R(dt))$ ein.
Wenn wir über alle möglichen Werte für $R(dt)$ integrieren, erhalten wir

$$\psi(s) = E[\psi(R(dt))] + o(dt).$$

Vorausgesetzt, dass die Funktion $\psi(s)$ im Definitionsbereich D von L liegt, bekommen wir die Differentialgleichung (welche sich auf unsere Integro-Differentialgleichung für die Ruinwahrscheinlichkeiten im Modell mit Sprüngen bezieht)

$$0 = a\psi'(s) + \frac{1}{2}b^2\psi''(s), S > 0.$$

Die allgemeine Lösung zu dieser linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten sieht so aus:

$$\psi(s) = C_1 + C_2 exp(-2as/b^2).$$

Für $s \to \infty$ sollten wir $\psi(s) \to 0$ haben, also $C_1 = 0$. An der Stelle $s = 0$ sind wir wegen der Fluktuation des Wiener Prozesses sofort ruiniert, also $C_2 = 1$. Als Konklusion, $\psi(s) = exp(-2a/b^2 s)$. Natürlich ist das kein präziser Beweis für die Ruinformel, da $\psi(s) \in D$ lediglich angenommen wurde. Dafür werden wir das Verifikationsargument unten verwenden.

Wir betrachten als nächstes das Optimale Investment Problem von Browne [4]. Für eine gegebene Investmentstrategie $A(t)$ ($A(t)$ ist der zur Zeit t investierte Betrag) ist der Risiko-Prozess eines Investors gegeben durch

$$dR^A(t) = \alpha dt + \beta dV(t) + A(t)(adt + bdW(t)),$$

wobei $V(t), W(t)$ zwei unabhängige Wiener Prozesse sind. Der erste Teil könnte den Ertrag in einem Versicherungsportfolio, entwickelt nach einer Brownschen Bewegung mit Drift, modellieren und der zweite den Kapitalertrag in einem riskanten Assert mit einem von einer logarithmierten Brownschen Bewegung modellierten Preisprozess. Das Problem ist es, die optimale Investmentstrategie $A(t)$ zu finden, welche die Überlebenswahrscheinlichkeit maximiert

$$\delta(s) = P\{R^A(t) \geq 0 \quad \forall \quad t|R^A(0) = s\}.$$

Angelehnt an (5) sieht die HJB-Gleichung so aus:

$$0 = \max_A \{\alpha V'(s) + \frac{1}{2}\beta^2 V''(s) + AaV'(s) + \frac{1}{2}A^2 b^2 V''(s)\}, s > 0.$$

Ein gewinnmaximierendes A existiert nur, wenn $V''(s) \leq 0$ und in diesem Fall ist es gegeben durch:

$$A = A(s) = -\frac{a}{b^2}\frac{V'(s)}{V''(s)}.$$

Eingesetzt erhalten wir

$$0 = \alpha V'(s) + \frac{1}{2}\beta^2 V''(s) + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\frac{V'(s)^2}{V''(s)}, s > 0$$

Nachdem dividieren durch $V'(s)$ und dem errechnen der negativen Lösung $-k$ der Gleichung

$$0 = \alpha + \frac{1}{2}\beta^2 \frac{1}{z} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2} z$$

erhalten wir eine Lösung der Form

$$A(s) = \frac{a}{b^2}k, \quad V(s) = 1 - exp(-ks), s > 0.$$

Das sagt uns, dass ein konstanter Betrag ak/b^2 optimal ist und die resultierende Ruinwahrscheinlichkeit $exp(-ks)$ ist kleiner - so wie es auch sein sollte - als die Ruinwahrscheinlichkeit ohne Investment $exp(-2\alpha/\beta^2 s)$, für $s > 0$. Man bemerkt dass die optimale Strategie nicht kaufen und behalten ist, sondern eine antizyklische Strategie: Wenn die Preise nach oben gehen, werden Aktien verkauft, wenn die Preise fallen, werden Aktien gekauft. Und wieder, die obenstehenden Berechungen lösen unser Maximierungsproblem noch nicht, da wir weder wissen ob $V(t)$ die einzige Lösung der HJB Gleichung ist, noch ob es die maximal mögliche Überlebenswahrscheinlichkeit $\delta(s)$ ist. Dafür verwenden wir das Verifikationsargument des nächsten Punktes.

4.2.4 Verifikationsargument

Das Verifikationsargument schließt den Spalt zwischen einer Lösung von einer Integro-Differentialgleichung oder einer HJB Gleichung und dem gegebenen Problem der zu berechnenden Ruinwahrscheinlichkeiten oder oder zu maximierenden Zielfunktionen. Um das ganze ein bisschen anschaulicher zu machen, überlegen wir uns noch einmal die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(s)$ für die Brownsche Bewegung mit positivem Drift. Wir haben eine Lösung $V(s) = exp(-2a/b^2 s)$ der Gleichung (6) gefunden. Wir nehmen τ als die Ruinzeit des Prozesses $R(t) = at + bW(t)$ an und definieren den Prozess $Y(t) = V(R(t \wedge \tau))$. Aus der Gleichung (6) kann man ablesen, dass $Y(t)$ ein Martingal ist, für das

$$E[Y(t)] = Y(0) = V(s).$$

Für $t \to \infty$ haben wir $Y(t) \to 0$ auf der Menge $\{\tau < \infty\}$ und $Y(t) \to 0$ auf der Menge $\{\tau = \infty\}$. Von der beschränkten Deckung erhlaten wir

$$V(s) = \lim_{t\to\infty} E[Y(t)] = P\{\tau < \infty\} = \psi(s),$$

was beweist, dass $V(t)$ auch tatsächlich die Ruinwahrscheinlichkeit für das Anfangskapital s ist.

Als ein zweites Beispiel betrachten wir das Optimierungsproblem von Browne [4]. Wir haben geshen, dass die HJB (5) eine glatte, beschränkte Lösung $V(s)$ hat mit der Eigenschaft, dass wir für alle möglichen Handlungen A Folgendes haben:

$$L^A V(s) \geq 0, s > 0. \tag{7}$$

$A*(t) = ak/b^2$ soll die konstruierte Strategie mit dem Opimierer $A(s)$ aus der HJB Gleichung sein (der konstant investierte Betrag) und $A(t)$ irgendeine Arbitrage zulässige Strategie. $R^*(t)$ und $R(t)$ sind dann die entsprechenden Risikoprozesse und τ^* und τ die entsprechenden Ruinzeiten und definieren die Prozesse $Y^*(t) = V(R^*(t \wedge \tau^*))$ und $Y(t) = V(R(t \wedge \tau))$.
Aus der HJB Gleichung sehen wir, dass $Y^*(t)$ ein Martingal ist und bezüglich (7) ist der Prozess $Y(t)$ ein Supermartingal und beide starten beim Wert $V(s)$. Also für alle $t \geq 0$

$$V(s) = E[Y^*(t)] \geq E[Y(t)].$$

Für die weitere Argumentation brauchen wir Randwerte, welche vom Optimierungsproblem abgeleitet sind und welche mit der Lösung $V(s)$ zufrieden sind. In unserem Optimierungsproblem wollten wir die Überlebenswahrscheinlichkeit $\delta(s)$ des (kontrollierten) Risikoprozesses maximieren. Die natürlichen Randbedingungen für den Wert der Funktion $\delta(s)$ sind $\delta(\infty) = 0$ (und $\delta(s) = 1$ für $s < 0$). Unsere Lösung $V(s)$ aus (5) erfüllt dieselben Randbedingungen (für die zweite Bedingung , beobachten wir, dass $V(s)$ die Arbitrage für $s \leq 0$). Für $t \to \infty$ haben wir

$$Y(t) \to 0 \quad auf \quad \{\tau < \infty\}, \quad Y^*(t) \to 0 \quad auf \quad \{\tau^* < \infty\}$$

und, da $R^*(t)$ eine Brownsche Bewegung mit positiven Drift ist, $Y^*(t) \to 1$ auf $\{\tau^* = \infty\}$.
Also $V(s) = lim_{t\to\infty} E[Y^*(t)] = P\{\tau^* < \infty\}$. Für den Prozess $Y(t)$ ist das Asymptotenverhalten für $t \to \infty$ weniger klar. Für $\epsilon > 0$ führen wir den Prozess $R_1(t)$, mit der Investmentstrategie $A(t) + \epsilon^2$ und dem Startkapital $s + \epsilon$, der entsprechenden Ruinzeit τ_1 und dem Prozess $Y_1(t) = V(R_1(t \wedge \tau_1))$, ein. Wir haben $R_1(t) = \epsilon + R(t) + \epsilon^2(at + bW(t))$ und daher $R_1(t) \to \infty$ auf der Menge $\{\tau_1 = \tau = \infty\}$.
Wie oben haben wir $V(s + \epsilon) \geq P\{\tau_1 = \tau = \infty\}$. Weiters,

$$\begin{aligned} &P\{\tau_1 < \infty \; and \; \tau = \infty\} \\ &\quad \leq P\{\epsilon + \epsilon^2(at + bW(t)) < 0 \quad f\ddot{u}r \quad irgendein \quad t\} \\ &\quad = exp(-2a\epsilon^2/(b^2\epsilon^4)\epsilon), \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} P\{\tau = 0\} &\leq P\{\tau_1 = \tau = \infty\} + \exp(-2a\epsilon^2/(b^2\epsilon^4)\epsilon) \\ &\leq V(s + \epsilon) + \exp(-2a\epsilon^2/(b^2\epsilon^4)\epsilon). \end{aligned}$$

Mit $\epsilon \to 0$ erhalten wir $P\{\tau = 0\} \leq V(s)$. Für arbiträre Investmentstrategien $A(t)$ ist die entsprechende Überlebensstratgie $\delta(s)$ begrenzt durch $V(s)$,

$$\delta(s) \leq V(s),$$

und das Maximum wird von der Strategie $A^*(t)$ erreicht.

In den folgenden Optimierungsproblemen, ist das Verifikationsargument ähnlich zu dem in Browne's Problem, also übergehen wir das und verweisen auf die Literatur, wann auch immer es nicht nach demselben Prinzip funktioniert (wie, z.B., im Fall der optimalen Rückversicherung).

4.2.5 Schritte zur Lösung

Für die Lösung eines stochastischen Kontrollproblems über die HJB Gleichung werden wir durch die folgenden Schritte gehen: wir schreiben den kontrollierten Risikoprozess für eine Kontrollkonstante A und seinen infinitesimalen Erzeuger auf und daraus schreiben wir die HJB Gleichung auf. Dann zeigen wir, dass die Gleichung eine glatte Lösung hat, welche die natürlichen Randbedingungen, abgeleitet vom Optimierungsproblem, erfüllt. Dann verwenden wir das Verifikationsargument um zu zeigen, dass die Lösung der HJB Gleichung der Wert der Funktion des Optimierungsproblems ist und der Maximierer in der Gleichung ermittelt die optimale Strategie in Feedbackform.
Das schwierigste Problem ist Schritt zwei: eine explizite Lösung zu einer HJB Gleichung im hier betrachteten Rahmen ist niemals möglich; das Beste, was man erhoffen kann, ist ein Existenzbereich, welchen eine gute numerische Methode für Berechungen erbringen kann.

5 Optimales Investment für Versicherer

5.1 HJB und seine praktische Form

Hier betrachten wir Investmentstrategien $A(t)$ (der Betrag, der in ein riskantes Asset investiert wird), welche vorhersehbare Prozesse mit Bezug zur natürlichen Foltration, die von den Prozessen $S(t)$ (den Schäden) und $Z(t)$ (dem Aktienpreis) erzeugt wird, sind. Das heißt, dass für die Stratgie, welche wir vielleicht verwenden wollen, alle Informationen genau vor der Zeit t verfügbar sind, also möge $A(t)$ nicht von der Information abhängen, dass ein Schaden zur Zeit t existiert, oder von der Größe dieses Schadens. Die HJB Gleichung für das Problem, die Überlebenswahrscheinlichkeit durch Investment zu maximieren, ist

$$\sup_A\{\lambda E[V(s-X)-V(s)]+(c+aV)V'(s)+\frac{1}{2}b^2A^2V''(s)\}=0, s\geq 0$$

Wenn wir nach A auflösen, was immer möglich ist, wenn $V''(s)<0$, erhalten wir

$$A=A(s)=-\frac{a}{b^2}\frac{V'(s)}{V''(s)}.$$

Wenn $A(0)\neq 0$ ist, würden die Fluktuationen des Wiener Prozesses sofort zu einem Ruin führen, d.h. $V(0)=0$, was nicht optimal sein kann, da wir ohne Investment $\delta(0)=1-\lambda E[X]/c>0$ wenn $\lambda E[X]<c$. Daraus folgern wir: $A(0)=0$ oder $V''(0)=-\infty$. Wenn wir das optimale $A(t)$ in die Integro-Differentialrechnung einsetzen, erhalten wir

$$\lambda E[V(s-X)-V(s)]+cV'(s)=\frac{1}{2}\frac{a^2}{b^2}\frac{V'(s)^2}{V''(s)}, s\geq 0. \tag{8}$$

Die natürlichen Randbedingungen sind $V(s)=0$ für $s<0$, $V(\infty)=1$ und $V''(0)=-\infty$. Diese Gleichung ist von zweiter Ordnung mit einer Singularität an 0 ($V''(0)=-\infty$); es ist von wenig Nutzen, selbst für numerische Lösungen, da wir für den Integralterm $g(s)=E[V(s-X)]$ die Werte von $V(u)$ für $0\leq u\leq s$ brauchen und dafür die Singularität an 0 stört. Wir werden die Gleichung durch ein System an zusammenwirkenden Integro-Differentialgleichungen ersetzen, was zu einem stabilen numerischen Algorithmus, zu einem elementaren Beweis für die Existenz einer Lösung und zu einem fast expliziten Ergebnis für den Fall von exponentiellen Schadenshöhen führt. Um die Notation zu vereinfachen, sollten wir zuerst beide Seiten der Gleichung durch a^2/b^2 dividieren und die neue Schadensintesität und die Prämienintensität bezeichnen, wieder mit λ und c. Dies führt zu einer Gleichung mit $a=b=1$. Als nächstes führen wir die Funktion $U(s)=A(s)^2$ ein und schreiben (8) als

$$\lambda(g(s)-V(s))+cV'(s)=-\frac{1}{2}V'(s)\sqrt{U(s)}, s\geq 0, \tag{9}$$

wobei $\sqrt{U(s)}$ immer die positive Wurzel von $U(s)$ bezeichnet. Angenommen

X hat eine stetige Dichte $h(x)$,

dann sehen wir, dass die Funktion $g(s)$ eine stetige Ableitung für $s\geq 0$ hat und wir so einmal mehr ableiten können und folgendes Ergebnis erhalten

$$\lambda(g'(s)-V'(s))+cV''(s)=-\frac{1}{2}V''(s)A(s)-\frac{1}{2}V'(s)A'(s), s\leq 0.$$

Unter Verwendung von $V''(s)A(s)=-V'(s)$ und wenn wir beide Seiten der Gleichung mit $A(s)$ multiplizieren, enden wir bei

$$\sqrt{U(x)}\left((\lambda+\frac{1}{2})V'(x)-\lambda g'(x)\right)+cV'(x)=\frac{1}{4}U'(x)V'(x), s\geq 0. \tag{10}$$

Die entsprechenden Randbedingungen sind $V(s) = 0$ für $s < 0$, $U(0) = 0$ und $V(\infty) = 1$. Die zwei zusammenhängenden Differentialgleichungen (9) und (10) sind äquivalent zu Gleichung (8) in dem Sinn, dass (8) eine glatte, konkave Lösung $V(s)$ hat, welche die natürlichen Randbedingungen erfüllen, wenn das System (9) und (10) eine Lösung $(V(s), U(s))$ mit konkavem $V(s)$ hat, $U(s) = (V'(s)/V''(s))^2$, welche die natürlichen Randbedingungen erfüllen. Das System von Differentialgleichungen kann für numerische Berechnungen verwendet werden und der folgende resultierende Algorithmus ist stabil.
Man startet mit $U_0(s) = 0$ und berechnet die Funktion $V_0(s)$ aus (9) und die natürlichen Randbedingungen (was die Überlebenswahrscheinlichkeit ohne Investment einbringt). Mit $(V_0(s), U_0(s))$ als Startpunkte definieren wir die Sequenz der Funktionen $(V_n(s), U_n(s))$ rekursiv mit $g_n(s) = E[V_n(s - X)]$,

$$\frac{\lambda(V_{n+1}(s) - g_n(s))}{c + \frac{1}{2}\sqrt{U_n(s)}} = V'_{n+1}(s), s \geq 0, V_{n+1}(\infty) = 1, \tag{11}$$

und

$$\left[\lambda + \frac{1}{2} - \lambda \frac{g'_n(s)}{V'_n(s)}\right] \sqrt{U_{n+1}(s)} + c = \frac{1}{4} U'_{n+1}(s), s \geq 0, U_{n+1}(0) = 0.$$

Die Bedingung $V_{n+1}(\infty) = 1$ kann mit der Homogenität des Systems erfüllt werden: wenn $h(s)$ eine Lösung von (11) ist, dann ist $\alpha h(s)$ auch eine Lösung. Daher erhlaten wir, wenn wir mit $h(0) = 1$ starten und normen, mit $V_{n+1}(s) = h(s)/h(\infty)$ eine Lösung, welche $V_{n+1}(\infty) = 1$ erfüllt. Die Folge von Funktionen $(V_n(s), U_n(s))$ konvergiert und der Grenzwert ist eine Lösung des Systems (9) und (10), welche die natürlichen Randbedingungen erfüllt.

5.2 Existenz einer Lösung

Es gibt zwei Quellen mit einem Existenzbeweis für die Gleichung (8), eine, mehr auf klassischen Methoden basierend, wie in [23] (in [9]), die andere mit einem Monotoniebeweis (in [10]). Für den Beweis in [9] nimmt man eine lokal beschränkte Dichte $h(x)$ der Schadenshöhenverteilung an, für den Beweis in [10] braucht man eine stetige Dichte $h(x)$. Der Monotoniebeweis funktioniert nicht nur für das optimale Investment Problem im Lundberg-Modell, sondern auch für den multivariaten Aufbau, welcher für Markov-Risikoprozesse benötigt werden.

Der Beweis durch Monotonie funktioniert wie folgt: zuerst löst man das Problem für eine fix gegeben Funktion $g(s)$, welche steigend, beschränkt und stetig differenzierbar ist. Die entsprechende Gleichung ist die HJB Gleichung für das folgende Optimierungsproblem: für eine gegebene Nutzenfunktion $g(s)$ maximiert man das erwartete, angehäufte, diskontierte Vermögen

$$E\left[\int_0^\tau \exp(-\lambda t) g(R(t)) dt\right]$$

mit Hilfe der Wahl einer optimalen Investmentstrategie $A(t)$. Man kann zeigen, dass die HJB Gleichung dieses Problems eine glatte Lösung $V_g(s)$ hat, der Maximierer von der HJB Gleichung definiert die optimale Investmentstrategie und $V_g(s)$ ist die Wertfunktion des Problems. Der Existenzbeweis basiert auf einem Monotonie-Argument unter Verwendung eines Iterationsverfahrens, ähnlich dem obigen numerischen Algprithmus. Es verwendet Differential-Ungleichheiten, welche in [22] untersucht werden.
Zweitens wird eine monotone Folge von Funktionen definiert, beginnend mit $V_0(s)$, der Überlebenswahrscheinlihckeit ohne Investment, wird dann rekursiv für die Wertfunktion $V_{n+1}(s)$ des obigen Optimierungsproblems mit Nutzenfunktion $g_n(s)$ gelöst. Die Funktionen

$V_n(s)$ sind die Wertfunktionen des Optimierungsproblems von optimalem Investment bis zum n-ten Schaden. Wenn $V_{n+1}(s) \geq V_n(s)$, dann gilt dasselbe auch für die entsprechenden Funktionen g und anders herum. Also können wir zeigen, dass wir eine monotone Folge $V_n(s)$ haben, welche konvergiert und der Grenzwert erweist sich als Lösung des ursprünglichem Optimierungsproblems.
Das Verifikationsargument im optimalen Investment Problem folgt genau dem Muster, welches in Sektion 3.2.4 beschrieben wird.

5.3 Exponentielle Schadenshöhen

Für exponentielle Schadenshöhen mit Dichte $h(x) = \theta \exp(-\theta x), x > 0$ seperiert sich das System von zusammenhängenden Differentialgleichungen und man erhält eine einzige Differentiagleichung für $A(t)$. Dieses Phänomen erscheint nicht nur für Exponentialverteilungen, sondern auch für arbiträre phastype Verteilungen mit einer Dichte, welche eine lineare Differentialgleichung von höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten erfüllt. Diese Verteilungen haben die schöne Eigenschaft, dass der nicht-lokale Operator $g(s) = E[V(s-X)]$ durch einen lokalen Operator, welcher die Ableitungen von $g(s)$ und $V(s)$ enthält, ersetzt werden kann.
Um die Notation zu vereifachen, nehmen wir an, dass X den Erwartungswert 1 hat. Wenn die Dichte von X $e^{-x}, x > 0$, ist, dann erfüllt die Funktion $g(s)$ die Differentialgleichung

$$g'(s) = V(s) - g(s), s > 0.$$

Aus (9) können wir sehen, dass $g'(s)$ durch den Faktor $V'(s)$ repräsentiert werden kann,

$$g'(s) = V(s) - g(s) = \frac{1}{\lambda}\left(c + \frac{1}{2}\sqrt{U(s)}\right)V'(s), s \geq 0,$$

und so erhalten wir eine Differntialgleichung, welche nur $U(s)$ enthält:

$$\sqrt{U(x)}\left\{\lambda + \frac{1}{2} - c - \frac{1}{2}\sqrt{U(s)}\right\} + c = \frac{1}{4}U'(x), s \geq 0. \tag{12}$$

Diese Gleichung ist eng verbunden mit der Lundberg-Gleichung unterhalb, mit welcher man den Annäherungskoeffizienten für den exponentiellen Rand für die Ruinwahrscheinlichkeit des kontrollierten Risikoprozesses erhalten kann:

$$\lambda + rc + \frac{1}{2} = \lambda E[exp(rX)].$$

Diese Gleichung im exponentiellen Fall sieht folgendermaßen aus

$$\lambda + rc + \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{1-r}$$

oder

$$cr^2 + r\left(\lambda + \frac{1}{2} - c\right) - \frac{1}{2} = 0.$$

Die Gleichung hat zwei Lösungen, $R > 0$ und $-\gamma < 0$. Da die Koeffizienten in dieser Gleichung und denen in (12) übereinstimmen, können wir (12) schreiben als

$$A'(s) = 2cA(s)\left(\frac{1}{A(s)} - R\right)\left(\frac{1}{A(s)} + \gamma\right), s > 0,$$

Eine Funktion $u(s)$ mit $u(0) = 1$, welche $-u(s)/u'(s) = A(s)$ erfüllt, ist

$$u(s) = \frac{\exp(-Rs)}{(1 + \gamma A(s))^R}.$$

Die Funktion $u(s)$ steht folgendermaßen in Beziehung zu $V'(s)$ und $V(s)$

$$V'(s) = \frac{\lambda}{c} V(0) u(s),$$

und

$$1 - V(s) = \frac{\lambda \int_s^\infty u(y)dy}{c + \lambda \int_0^\infty u(y)dy}. \tag{13}$$

Für einen expliziten Ausdruck der Konstante $\int_s^\infty u(y)dy$ siehe [11]. In der Grafik, Figure 1, wird der Optimierer $A(s)$ für Schadenshöhenverteilungen gezeigt, welche exponentiell sind mit Erwartungswert 1, Exp(1) (niedrigste Kurve), Erlang(2) (Faltung von zwei Exp(1), mittlere Kurve) und Erlang(3) (Faltung von drei Exp(1), oberste Kurve).

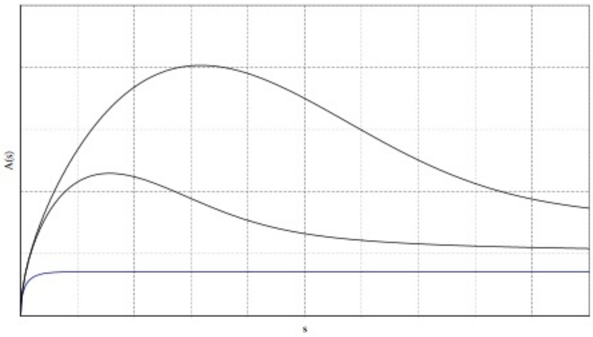

Figure 1: Optimal Investment Strategies for Erlang Claims

Literatur

[1] Brockett P., Xia X. *Operations research in insurance: a review* Trans. Act. Soc.XLVII, 7-80, 1995

[2] Browne, S. *Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin.* Math. Operations Res. 20, 937-958, 1995

[3] Fleming, W.H. and Rishel, R.W. *Controlled Markov processes and viscosity solutions.* Springer, New York, 1975

[4] Fleming, W.H. and Soner, M. *Deterministic and stochastic opti- mal control.* Springer, New York, 1993

[5] Föllmer, H., Schied, A. *Stochastic Finance, An Introduction in Diskrete Time* De Gruyter, Berlin/New York, 2011

[6] Grandell, J. *Aspects of Risk Theory.* Springer, New York, 1991

[7] Gerber, H. U. *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* SS.S. Huebner Foundation Monographs, University of Pennsilvania, 1979

[8] Hipp, C. *Stochastic Control with Application in Insurance.* Karlsruhe, 2004

[9] Hipp, C. and Plum, M. *Optimal investment for insurers.* Insurance: Math. Econom. 27, 215–228, 2000

[10] Hipp, C. and Plum, M. *Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers.* Finance and Stochastics 7, 299-321, 2003

[11] Hipp, C. and Schmidli, H. *Asymptotics of the ruin probability for the controlled risk process: the small claims case.* To appear in: Scandinavian Actuarial J, 2003

[12] Karatzas, I., Shreve, S. *Methods of mathematical finance.* Springer, Heidelberg, 1997

[13] Martin-Löf, A. *Lectures on the use of control theory in insurance.* Scand. Actuarial J. 1-25, 1994

[14] Merton, R.C. *Lifetime portfolio selection under uncertainity: The continuos-time case.* Review of Economics and Statistics, 51, 247-257, 1969

[15] Merton, R.C. *Optimum consumption and portfolio rules in a continous-time model.* Journal of Economic Theory, 3, 373-413, 1971

[16] Riedle, M. *Risikotheorie.* Humboldt-Universität zu Berlin, 2005

[17] Rolski, T. Schmidli, H. Schmidt, V. Teugels, J. *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* Wiley Series in Probability and Statistics, 1998

[18] Sachernegg, K. *Klassische Risikomodelle.* Technische Universität Graz, 2008

[19] Scherer, W. *Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse* Technische Universität Wien, 2013

[20] Springer Gabler Verlag (Herausgeber) *Gabler Wirtschaftslexikon, Stichwort: Ruinwahrscheinlichkeit* online im Internet:
http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Archiv/296465/ruinwahrscheinlichkeit-v3.html, Abrufdatum 05.06.2014

[21] Taksar, M. *Optimal Risk/Dividend Distribution Control Models: Applications to Insurance.* Mathematical Methods of Operations Research, 1, 1-42, 2000

[22] Walter, W. *Differential and Integral Inequalities.* Springer, New York, 1970

[23] Walter, W. *Ordinary Differential Equations.* Readings in Mathe- matics, Springer, New York, 1998