TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

SEMINARARBEIT

Effizients Hedgen

unter der Leitung von

Privatdoz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold
Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik

eingereicht an der Technischen Universität Wien
Fakultät für Mathematik und Geoinformation

von

Christoph Gerstenecker
Matrikelnummer 1125236
Kellergasse 6, 2103 Langenzersdorf

Langenzersdorf, am 23. Februar 2015

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im Rahmen der Vorlesung *Finanzmathematik 1 - Diskrete Modelle* wurde die Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie unter der Annahme der Arbitragefreiheit auf Finanzinstrumente angewandt. Bei der Betrachtung amerikanischer Optionen (Optionen die zu einem vom Käufer gewählten Zeitpunkt ausgeführt werden dürfen) haben wir die Snell-Einhüllende, das kleinste Supermartingal, das den Payoffprozess dominiert, eingeführt um uns sinnvolle Hedgingstrategien zu konstruieren. Vollständige Märkte waren hierbei kein Problem, da es ein einziges eindeutiges risikoloses Maß gibt und somit auch nur eine Version dieser Snell-Einhüllenden. Wenn aber nicht mehr jeder Contingent Claim[1] erreichbar ist, dann kann die Snell-Einhüllende für verschiedene risikoneutrale Maße unterschiedlich sein. Für diesen Fall haben wir uns eine Art *Uniforme Doob-Zerlegung* überlegt, so dass wir die sogenannte Upper-Snell-Einhüllende (das essentielle Supremum der Snell-Einhüllenden über alle risikoneutralen Maße) hedgen können. In der theoretischen Betrachtung diese Problems ist das zwar eine einigermaßen befriedigende Lösung, allerdings sind die Kosten für diese Art des Hedgings in der Regel viel zu hoch. Um dieses Problem zu lösen benötigen wir einen anderen Zugang, der in dieser Arbeit dargelegt werden soll.

Zunächst betrachten wir sogenannte *Quantilhedgingstrategien* wobei wir die Voraussetzungen dahin lockern, dass wir nicht mehr absolut auf der sicheren Seite sein wollen, sondern mit hoher Wahrscheinlichkeit. Ziel ist es hier die Wahrscheinlichkeit abgesichert zu sein unter einer bestimmten Kostenbeschränkung zu maximieren. Hierbei werden wir einen amerikanischen Contingent Claim H so verändern, dass das Superhedgingproblem des modifizierten Claims $\tilde{H}$ unser Quantilhedgingproblem löst. $\tilde{H}$ ist die Lösung eines *statischen Neyman-Pearson-Optimierungsproblems*. In der Regel ist dieser modifizierte Claim eine *Knockout-Option*, also $\tilde{H} = H \cdot \mathbb{1}_A$. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes ausschlaggebend, nicht jedoch die Höhe. Danach werden wir darauf aufbauend Hedgingstrategien mit Hilfe von Verlustfunktionen konstruieren.

In weiterer Folge werden hauptsächlich die Bezeichnungen aus dem Buch *Stochastic Finance* [1] verwendet. Die in der Arbeit angeführten Beweise sind teilweise sehr detailiert, die Motivation hierfür ist der Wunsch eine Möglichkeit für Seminaristen zu schaffen, sich mit dem Thema in kurzer Zeit vollständig auseinander zu setzen. Ich würde Sie, verehrte Leser bitten, mir entdeckte Druckfehler, Fehler beweistechnischer Natur oder Anregungen zu Form und Layout mit Seiten- und Zeilenangabe unter `e1125236@student.tuwien.ac.at` mitzuteilen.

[1] engl. für Zahlungsanspruch

Kapitel 1

Diverse Hilfestellungen

1.1 Hilfssätze

Satz 1.1. *Jeder erreichbare diskontierte Claim H ist bezüglich jeden äquivalenten Martingalmaßes integrierbar, es gilt*

$$E^*[H] < \infty \quad \textit{für alle } P^* \in \mathcal{P}.$$

Weiters gilt für alle äquivalenten Martingalmaße $P^* \in \mathcal{P}$, dass für den Wertprozess einer jeden replizierenden Strategie

$$V_t = E^*[H|\mathcal{F}_t] \quad P\textit{-f.s. für } t = 0, \ldots, T$$

gilt. Anders gesagt, V ist ein nichtnegatives P^*-Martingal.

Beweis. Siehe Theorem 5.25 in [1]. □

Lemma 1.2. *Sei (ξ_n) eine Folge in $L^0(\Omega, \mathcal{F}_0, P; \mathbb{R}^d)$ sodass $\sup_n |\xi_n| < \infty$ P-f.s. Dann gibt es eine Folge von Konvexkombinationen*

$$\eta_n \in \operatorname{conv}\{\xi_n, \xi_{n+1}, \ldots\}$$

die P-f.s. gegen ein $\eta \in L^0(\Omega, \mathcal{F}_0, P; \mathbb{R}^d)$ konvergiert.

Beweis. Siehe Lemma 1.70 in [1]. □

Satz 1.3. *Ein arbitragefreies Marktmodell ist dann und nur dann vollständig, wenn es genau ein äquivalentes Martingalmaß gibt. In diesem Fall ist die Anzahl der Atome in $(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ durch $(d+1)^T$ beschränkt. Hierbei ist $d+1$ die Anzahl der Assets und T die Anzahl der Perioden im Mehrperiodenmarktmodell.*

Beweis. Siehe Theorem 5.37 [1]. □

Im folgenden Ergebnis der Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ die $\mathfrak{S}$-messbaren Funktionen und mit $\mathcal{M}_\mu$ die bezüglich μ integrierbaren.

Lemma 1.4 (Lemma von Fatou). *Existiert zur Folge* $(f_n) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein* $g \in \mathcal{M}_\mu$ *mit* $f_n \geq g$ μ*-f.ü. für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und gilt* $\int g^- \, d\mu < \infty$, *so gilt*

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu.$$

Gibt es hingegen ein $g \in \mathcal{M}_\mu$ *mit* $f_n \leq g$ μ*-f.ü. für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und gilt* $\int g^+ \, d\mu < \infty$, *so gilt*

$$\limsup_n \int f_n \, d\mu \leq \int \limsup_n f_n \, d\mu.$$

Beweis. Siehe Folgerung 9.32 in [2]. □

1.2 Nutzenfunktion

Im Beweis von Satz 3.17 betrachten wir die Verlustfunktion ℓ als negative Nutzenfunktion u um die Ergebnisse aus Abschnitt 3.3 [1] anwenden zu können. Diejenigen, auf die wir zurückgreifen, sollen hier kurz angeführt werden.

Definition 1.5 (Nutzenfunktion). Eine Funktion $u : S \to \mathbb{R}$ heißt *Nutzenfunktion*, wenn sie strikt konkav, streng monoton wachsend und stetig auf S ist.

Sei u eine Nutzenfunktion, deren Erwartungswert $E[u(X)]$ es unter einer gegebenen Budgetbeschränkung zu maximieren gilt. Für ein gegebenes Anfangskapital $w \in \mathbb{R}$ sei die zugehörige Budgetmenge definiert als $\mathcal{B} := \{X \in \mathcal{X} \cap L^1(P^*) \,|\, E^*[X] \leq w\}$, wobei $\mathcal{X}$ eine allgemeine Konvexe Menge in $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ von *zulässigen Payoffprofilen* ist. Das Optimierungsproblem hier kann folgendermaßen festgelegt werden:

$$\text{Maximiere } E[u(X)] \text{ über alle } X \in \mathcal{B}.$$

Im allgemeinen sind unsere Payoffprofile nichtnegativ und daher werden wir u nur auf $[0, \infty)$ betrachten. In den meisten Anwendungen sind unsere Payoffprofile durch eine $\mathcal{F}$-messbare Zufallsvariable $W : \Omega \to [0, \infty]$ beschränkt. In unserem speziellen Fall, den wir in Kapitel 3 konstruieren, ist das genau der diskontierte Claim H. Die *zulässigen Payoffprofile* definieren wir nun als

$$\mathcal{X} := \{X \in L^0(P) \,|\, 0 \leq X \leq W \;\; P\text{-f.s.}\}.$$

Das ziel ist es also den erwarteten Nutzen $E[u(X)]$ über alle $X \in \mathcal{B}$ zu maximieren, wobei $\mathcal{B}$ gegeben ist als

$$\mathcal{B} = \{X \in L^1(P^*) \,|\, 0 \leq X \leq W \;\; P\text{-f.s. und } E^*[X] \leq w\}.$$

Zunächst folgt ein allgemeines Resultat über die Existenz.

Proposition 1.6. *Sei* u *eine Nutzenfunktion auf* $[0, \infty)$ *und sei* W P*-f.s. endlich und es gilt* $E[u(W)] < \infty$. *Dann gibt es ein eindeutiges* $X^* \in \mathcal{B}$, *das den erwarteten Nutzen* $E[u(X)]$ *über alle* $X \in \mathcal{B}$ *maximiert.*

Beweis. Der Beweis ist ähnlich dem von Proposition 3.15. Siehe Proposition 3.36 [1]. □

In Abschnitt 3.3 wollen wir aber im Spezialfall eines vollständigen Marktmodells nicht nur die Existenzaussage haben, sondern auch explizit eine Lösung angeben. Daher treffen wir nun für $u : [0, \infty) \times \Omega \to [0, \infty)$ die weitere Annahme, dass es auf $(0, \infty)$ stetig differenzierbar ist. I^+ ist für alle $\omega \in \Omega$ die Inverse von $u'(\cdot, \omega)$ wobei sie folgendermaßen erweitert wird:

$$a := \lim_{x \uparrow \infty} u'(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad b := u'(0+) = \lim_{x \downarrow 0} u'(x) \leq +\infty.$$

Wir definieren

$$I^+ : (a, b) \to (0, \infty)$$

als die stetige, bijektive, streng monoton fallende inverse Funktion zu u' auf (a, b) und erweitern sie auf $[0, \infty]$ durch

$$I^+(y) := \begin{cases} 0 & \text{für } y \geq b, \\ +\infty & \text{für } y \leq a. \end{cases}$$

Mit dieser Festlegung ist $I^+ : [0, \infty] \to [0, \infty]$ stetig.

Satz 1.7. *Sei $X^* \in \mathcal{B}$ von der Form*

$$X^* = I^+(c\,\varphi) \wedge W$$

für eine Konstante $c > 0$, sodass $E^*[X^*] = w$. Wenn $E[u(X^*)] < \infty$, dann ist X^* der eindeutige Maximierer des erwarteten Nutzens $E[u(X)]$ über alle $X \in \mathcal{B}$.

Beweis. Siehe Theorem 3.39 [1]. □

Korollar 1.8. *Wenn $E[u(W)] < \infty$ und wenn $0 < w < E^*[W] < \infty$, dann gibt es eine eindeutige Konstante $c > 0$, sodass für*

$$X^* = I^+(c\,\varphi) \wedge W$$

$E^*[X^*] = w$ gilt. X^* ist der eindeutige Maximierer des erwarteten Nutzens $E[u(X)]$ über alle $X \in \mathcal{B}$.

Beweis. Siehe Corollary 3.42 [1]. □

Korollar 1.9. *Wenn $E[u(W, \cdot)] < \infty$ und wenn $0 < w < E^*[W] < \infty$, dann gibt es eine eindeutige Konstante $c > 0$, sodass*

$$X^*(\omega) := I^+(c\,\varphi(\omega), \omega) \wedge W(\omega)$$

der eindeutige Maximierer des erwarteten Nutzens

$$E[u(X, \cdot)] = \int u(X(\omega), \omega)\, P(d\omega)$$

über alle $X \in \mathcal{B}$ ist.

Kapitel 2

Das Lemma von Neyman-Pearson

Bei den Überlegungen in Kapitel 3 hilft uns das Lemma von Neyman-Pearson fundamental weiter. Daher soll es hier ein bisschen genauer betrachtet werden.

Satz 2.1 (Lebesgue-Zerlegung)**.** *Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ gibt es eine Menge $N \in \mathcal{F}$ mit $Q[N] = 0$ und eine $\mathcal{F}$-messbare Funktion $\varphi \geq 0$ so dass gilt*

$$P[A] = P[A \cap N] + \int_A \varphi \, dQ \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F}.$$

Für die Dichte gilt dann

$$\frac{dP}{dQ} := \begin{cases} \varphi & \text{auf } N^c, \\ +\infty & \text{auf } N. \end{cases}$$

Beweis. Sei $R := \frac{1}{2}(Q + P)$. Dann sind sowohl Q als auch P absolutstetig bezüglich R mit den Dichten $\frac{dQ}{dR}$ und $\frac{dP}{dR}$, da

$$\begin{aligned} R(A) = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2}(Q(A) + P(A)) = 0 \\ &\Leftrightarrow Q(A) + P(A) = 0 \\ &\Leftrightarrow Q(A) = -P(A) \\ &\Rightarrow Q(A) = P(A) = 0. \end{aligned}$$

Sei nun

$$N := \left\{ \frac{dQ}{dR} = 0 \right\},$$

dann gilt $Q[N] = 0$, wegen

$$Q[N] = \int_N dQ = \int_N \frac{dQ}{dR} \, dR = \int_{\left\{\frac{dQ}{dR} = 0\right\}} \frac{dQ}{dR} \, dR = \int_N 0 \, dR = 0 \cdot R(N) = 0.$$

Wir definieren

$$\frac{dP}{dQ} := \varphi := \begin{cases} \frac{dP}{dR} \cdot \left(\frac{dQ}{dR}\right)^{-1} & \text{auf } N^c, \\ +\infty & \text{auf } N. \end{cases} \tag{2.1}$$

Dann gilt für eine $\mathcal{F}$-messbare Funktion $f \geq 0$

$$\int f\,dP = \int_N f\,dP + \int_{N^c} f\,dP \tag{2.2a}$$
$$= \int_N f\,dP + \int_{N^c} f\,\frac{dP}{dR}\,dR \tag{2.2b}$$
$$= \int_N f\,dP + \int_{N^c} f\,\frac{dP}{dR}\cdot\left(\frac{dQ}{dR}\right)^{-1} dQ \tag{2.2c}$$
$$= \int_N f\,dP + \int_{N^c} f\varphi\,dQ + \underbrace{\int_N f\varphi\,dQ}_{=0,\text{ da } Q[N]=0} \tag{2.2d}$$
$$= \int_N f\,dP + \int f\,\varphi\,dQ. \tag{2.2e}$$

Da für jede Menge A auch ihre Indikatorfunktion $\mathbb{1}_A$ messbar ist gilt nun wegen (2.2)

$$\begin{aligned}P[A] &= \int_A dP = \int \mathbb{1}_A\,dP = \int_N \mathbb{1}_A\,dP + \int \mathbb{1}_A\cdot\varphi\,dQ \\ &= \int \mathbb{1}_{\{A\cap N\}}\,dP + \int \mathbb{1}_A\cdot\varphi\,dQ = \int_{A\cap N} dP + \int_A \varphi\,dQ \\ &= P[A\cap N] + \int_A \varphi\,dQ\end{aligned}$$

und wir haben mit der oben definierten Dichte (2.1) genau die im Satz gewünschte Darstellung. □

Seien P und Q Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum $(\Omega,\mathcal{F})$ und sei

$$P[A] = P[A\cap N] + \int_A \frac{dP}{dQ}\,dQ, \quad A\in\mathcal{F},$$

die Lebesgue-Zerlegung von P bezüglich Q wie in Satz 2.1. Für ein festes $c \geq 0$ sei

$$A^0 := \left\{\frac{dP}{dQ} > c\right\}, \tag{2.3}$$

wobei auf N $\frac{dP}{dQ} = \infty$ gelten soll.

Proposition 2.2 **(Lemma von Neyman-Pearson).** *Wenn unter den oben angeführten Voraussetzungen für ein $A \in \mathcal{F}$ $Q[A] \leq Q[A^0]$ gilt, so gilt auch $P[A] \leq P[A^0]$.*

Beweis. Sei $F := \mathbb{1}_{A^0} - \mathbb{1}_A$. Wegen (2.3) und der Tatsache, dass auf N $\frac{dP}{dQ} = \infty > c$ gilt, ist N eine Teilmenge von A^0 und wir können $F(N)$ als

$$F(N) = \mathbb{1}_{A^0}(N) - \mathbb{1}_A(N) = 1 - \mathbb{1}_A(N) \geq 0$$

schreiben und damit ist F auf N nichtnegativ. Weiters gilt

$$F \cdot \left(\frac{dP}{dQ} - c\right)(A^0) = \underbrace{F(A^0)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\frac{dP}{dQ}(A^0)}_{>c} - c\right)}_{\geq 0} \geq 0, \tag{2.4a}$$

$$F \cdot \left(\frac{dP}{dQ} - c\right)((A^0)^c) = \underbrace{F((A^0)^c)}_{=-\mathbb{1}_A \leq 0} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\frac{dP}{dQ}((A^0)^c)}_{\leq c} - c\right)}_{\leq 0} \geq 0, \tag{2.4b}$$

und daher ist $F \cdot \left(\frac{dP}{dQ} - c\right)$ auf dem gesamten Ereignisraum nichtnegativ. Nun gilt

$$\begin{aligned} P[A^0] - P[A] &= \int_{A^0} dP - \int_A dP = \int \left(\mathbb{1}_{A^0} - \mathbb{1}_A\right) dP \\ &= \int F \, dP \underbrace{=}_{\text{Satz 2.1}} \underbrace{\int_N F \, dP}_{\geq 0} + \int F \cdot \frac{dP}{dQ} \, dQ \\ &\underbrace{\geq}_{(2.4)} c \int F \, dQ = c \int \left(\mathbb{1}_{A^0} - \mathbb{1}_A\right) dQ = c \left(\int_{A^0} dQ - \int_A dQ\right) \\ &= c\left(Q[A^0] - Q[A]\right). \end{aligned}$$

Daher folgt nun

$$Q[A] \leq Q[A^0] \Leftrightarrow Q[A^0] - Q[A] \geq 0 \Rightarrow P[A^0] - P[A] \geq 0 \Leftrightarrow P[A] \leq P[A^0]$$

und wir haben das gewünschte Resultat gezeigt. □

Da die Indikatorfunktion nur die Werte 0 und 1 annehmen kann wollen wir oben stehenden Satz auf eine größere Klasse von von Funktionen ausweiten indem wir $\mathcal{F}$-messbare Funktionen $\psi : \Omega \to [0, 1]$ betrachten. Die Menge aller solcher Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{R}$.

Satz 2.3 (Verallgemeinertes Lemma von Neyman-Pearson). *Sei* $\Pi := \frac{1}{2}(P + Q)$ *und sei* $\varphi := \frac{dP}{dQ}$ *wie in Satz 2.1 definiert.*

(a) Sei $c \geq 0$ *und für* $\psi^0 \in \mathcal{R}$ *gilt*

$$\psi^0 = \begin{cases} 1 & \textit{auf } \{\varphi > c\}, \\ 0 & \textit{auf } \{\varphi < c\} \end{cases} \quad \Pi - f.s. \tag{2.5}$$

Dann gilt für jedes $\psi \in \mathcal{R}$

$$\int \psi \, dQ \leq \int \psi^0 \, dQ \Rightarrow \int \psi \, dP \leq \int \psi^0 \, dP. \tag{2.6}$$

(b) Für ein $\alpha_0 \in (0,1)$ gibt es ein $\psi^0 \in \mathcal{R}$ der Form (2.5) sodass $\int \psi^0 \, dQ = \alpha_0$. Wenn c ein $(1-\alpha_0)$-Quantil von φ unter Q ist, dann können wir ψ^0 auch festlegen durch

$$\psi^0 = \mathbb{1}_{\{\varphi > c\}} + \kappa \cdot \mathbb{1}_{\{\varphi = c\}},$$

wobei κ definiert ist als

$$\kappa := \begin{cases} 0 & \text{wenn } Q[\varphi = c] = 0, \\ \frac{\alpha_0 - Q[\varphi > c]}{Q[\varphi = c]} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Jedes $\psi^0 \in \mathcal{R}$, das (2.6) genügt, ist von der Form (2.5) für ein $c \geq 0$.

Beweis. (a) Sei $F := \psi^0 - \psi$. Hierauf wird dann einfach der Beweis von Proposition 2.2 angewandt.

(b) Sei F die Verteilung der Funktion $\varphi = \frac{dP}{dQ}$ unter Q. Dann gilt wegen $F(c-) \leq (1-\alpha_0) \leq F(c)$

$$Q[\varphi > c] = 1 - Q[\varphi \leq c] = 1 - F(c) \leq \alpha_0$$

und

$$\begin{aligned} Q[\varphi = c] &= F(c) - F(-c) \\ &\geq F(c) - (1 - \alpha_0) \\ &= F(c) - 1 + \alpha_0 \\ &= \alpha_0 - (1 - F(c)) \\ &= \alpha_0 - Q[\varphi > c] \geq 0. \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$1 \geq \frac{\alpha_0 - Q[\varphi > c]}{Q[\varphi = c]} \geq 0$$

und daher gilt $0 \leq \kappa \leq 1$ und ψ ist aus $\mathcal{R}$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} \int \psi^0 \, dQ &= \underbrace{\int_{\{\varphi < c\}} \psi^0 \, dQ}_{=0} + \int_{\{\varphi = c\}} \psi^0 \, dQ + \int_{\{\varphi > c\}} \psi^0 \, dQ \\ &= \int_{\{\varphi = c\}} \kappa \, dQ + \int_{\{\varphi > c\}} dQ \\ &= \frac{\alpha_0 - Q[\varphi > c]}{Q[\varphi = c]} \cdot Q[\varphi = c] + Q[\varphi > c] \\ &= \alpha_0. \end{aligned}$$

(c) Sei $\psi^* \in \mathcal{R}$ und es gelte

$$\int \psi\, dQ \leq \int \psi^*\, dQ \Rightarrow \int \psi\, dP \leq \int \psi^*\, dP.$$

Fall 1: $\alpha_0 = 0$.

Aus $\int \psi\, dQ \leq \int \psi^*\, dQ = \alpha_0 = 0$ folgt $\psi^* = \psi = 0$ Q-f.s. Damit gilt

$$\int \psi^*\, dP = \int \underbrace{\psi^*}_{=0\ \ Q\text{-f.s.}} \frac{dP}{dQ}\, dQ = 0$$

und daraus folgt, dass

$$\psi^* = 0 \quad P\text{-f.s.}$$

Nun ist $\psi^* = 0$ P-f.s. und Q-f.s. und damit auch

$$\psi^* = 0 \quad \Pi\text{-f.s.}$$

Es gilt

$$\psi^* = \begin{cases} 1 & \text{auf } \{\varphi > c\} \\ 0 & \text{auf } \{\varphi < c\} \end{cases} \quad \Pi\text{-f.s.}$$

mit $\|\varphi\|_\infty \leq c$ und $\frac{dP}{dQ} = \varphi > 0$, womit wir die Darstellung (2.5) gezeigt haben.

Fall 2: $\alpha_0 = 1$.

Für $\int \psi\, dQ \leq \int \psi^*\, dQ = \alpha_0 = 1$ gilt $\psi^* = \psi = 1$ Q-f.s. und damit gilt mit obigem Argument

$$\psi^* = \mathbb{1}_{\{\varphi > c\}} = \begin{cases} 1 & \text{auf } \{\varphi > c\} \\ 0 & \text{auf } \{\varphi < c\} \end{cases} \quad \Pi\text{-f.s.}$$

mit $Q[\varphi > c] = 1$ und $Q[\varphi = c] = 0$, womit wir unsere Darstellung (2.5) gezeigt haben.

Fall 3: $\alpha_0 \in (0, 1)$.

Sei ψ^0 wie in (b), dann erfüllt es bereits die Darstellung (2.5). Es gilt $\alpha_0 = \int \psi^0\, dQ = \int \psi^*\, dQ$, wenn wir c entsprechend wählen. Da nach Voraussetzung und wegen Teil (a) für ψ^0 und ψ^* (2.6) gilt können wir wegen

$$\int \psi^*\, dQ = \int \psi^0\, dQ \Leftrightarrow \left(\left(\int \psi^*\, dQ \leq \int \psi^0\, dQ\right) \wedge \left(\int \psi^0\, dQ \leq \int \psi^*\, dQ\right)\right)$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{(2.6)} \left(\left(\int \psi^*\, dP \leq \int \psi^0\, dP\right) \wedge \left(\int \psi^0\, dP \leq \int \psi^*\, dP\right)\right)$$

folgern, dass

$$\int \psi^* \, dP = \int \psi^0 \, dP.$$

Nun gilt für $f := \psi^0 - \psi^*$ und $N = \{\varphi = \infty\}$

$$0 = \int f \, dP - c \int f \, dQ = \int_N f \, dP + \int f \cdot (\varphi - c) \, dQ. \tag{2.7}$$

f ist auf N P-f.s. nichtnegativ, da $N \subseteq \{\varphi > c\}$ und

$$f(N) = \psi^0(N) - \psi^*(N) = 1 - \psi^*(N) \geq 0 \quad P\text{-f.s.} \tag{2.8}$$

Da ψ^0 wie in (b) gewählt ist wissen wir ja bereits, dass $\psi^0 = \mathbb{1}_{\{\varphi > c\}}$ Π-f.s. und damit auch P-f.s. Weiters gilt

$$f \cdot (\varphi - c) \geq 0 \quad Q\text{-f.s.}, \tag{2.9}$$

da

$$\begin{aligned} f(\{\varphi > c\}) &= \psi^0(\{\varphi > c\}) - \psi^*(\{\varphi > c\}) \\ &= 1 - \psi^*(\{\varphi > c\}) \geq 0 \quad \Pi\text{-f.s.} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(\{\varphi < c\}) &= \psi^0(\{\varphi < c\}) - \psi^*(\{\varphi < c\}) \\ &= -\psi^*(\{\varphi < c\}) \leq 0 \quad \Pi\text{-f.s.} \end{aligned}$$

und damit auch Q-f.s. und daher

$$f \cdot (\varphi - c)\,(\{\varphi > c\}) = \underbrace{f(\{\varphi > c\})}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\varphi(\{\varphi > c\})}_{> c} - c\right)}_{\geq 0} \geq 0$$

und

$$f \cdot (\varphi - c)\,(\{\varphi < c\}) = \underbrace{f(\{\varphi < c\})}_{\leq 0} \cdot \underbrace{\left(\underbrace{\varphi(\{\varphi < c\})}_{< c} - c\right)}_{\leq 0} \geq 0$$

womit (2.9) ersichtlich ist, wenn $Q[\varphi = c] = 0$. Mit (2.8) und (2.9) folgt nun aus (2.7) wegen

$$\int_N \underbrace{f}_{\geq 0 \ P\text{-f.s. auf } N} dP = -\int \underbrace{f \cdot (\varphi - c)}_{\geq 0 \ Q\text{-f.s.}} dQ,$$

dass

$$\int_N f\, dP = \int f \cdot (\varphi - c)\; dQ = 0$$

und dazu äquivalent

$$\int_N f \cdot \frac{dP}{d\Pi}\, d\Pi = \int f \cdot (\varphi - c) \cdot \frac{dQ}{d\Pi}\, d\Pi = 0.$$

Wie man sieht verschwindet f Π-f.s. auf $\{\varphi \neq c\}$ und damit gilt $\psi^0 = \psi^*$ Π-f.s. und wir haben unsere gewünschte Darstellung (2.5) gezeigt.

$\square$

Kapitel 3

Effizientes Hedgen

3.1 Motivation

Sei H ein diskontierter Europäischer Claim in einem arbitragefreien Marktmodell, sodass

$$\pi_{\text{sup}}(H) = \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[H] < \infty.$$

Aus den vorherigen Kapiteln in [1] beziehungsweise der Vorlesung *Finanzmathematik 1 - Diskrete Modelle* wissen wir, dass es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie gibt, für deren Wertprozess

$$V_T^{\uparrow} \geq H \quad P\text{-f.s.}$$

gilt. Bei Verwendung einer Superhedgingstrategie könnte der Verkäufer sich nun gegen jeden möglichen Zahlungsanspruch, der ihm gegenüber beim Verkauf dieses Claims entsteht absichern. Damit würde er bei diesem Geschäft kein Risiko mehr eingehen. Der kleinste Betrag den er in diese Strategie investieren müsste ist $\pi_{\text{sup}}(H)$. Diesen Preis kann er aber in der Regel nicht verlangen, denn in einem unvollständigen Marktmodell ergäbe sich damit, wenn der Claim nicht erreichbar ist, eine Arbitragemöglichkeit, da $\pi_{\text{sup}}(H)$ nicht mehr in der Menge der arbitragefreien Preise enthalten, sondern lediglich deren Supremum ist. Selbst wenn H erreichbar ist, würde eine komplette Auslöschung des Risikos den gesamten Gewinn vom Verkauf des Claims benötigen und damit dieser sinnlos.

Wir werden daher unsere Voraussetzungen dahin lockern, dass der Verkäufer bereit ist ein gewisses Risiko einzugehen und dafür weniger in das Hedgen des Claims investieren muss. Um diese Lockerung auf eine wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlage zu stellen formulieren wir unser neues Problem dahingehend, dass wir die Wahrscheinlichkeit maximieren wollen, dass der Hedge des Verkäufers unter der Kostenbeschränkung für das Investment erfolgreich ist. Um an dieser Stelle nicht die Sinnhaftigkeit der Theorie über das Superhedging anzuzweifeln sei angemerkt: unser Ziel im Folgenden wird sein zu einem Claim H ein Optimierungsproblem zu lösen, das uns einen Claim $\tilde{H}$ liefert, dessen Superhedgingstrategie genau unser neu formuliertes Hedgingproblem löst. Somit können wir die uns bisher angeeignete Finanzmärktetheorie vollständig integrieren.

3.2 Quantilhedgen

Wir beschränken nun das anfängliche Investment für die Hedgingstrategie mit einem

$$v < \pi_{\sup}(H).$$

Wir suchen eine selbstfinanzierende Handelsstrategie, deren Wertprozess die Wahrscheinlichkeit

$$P[V_T \geq H]$$

maximiert, wobei wir uns auf diejenigen Handelsstrategien einschränken, deren Wert zum Zeitpunkt 0 durch v beschränkt ist und für die $V_t \geq 0$ für $t = 0, \ldots, T$ gilt. Hierfür führen wir den Begriff der *Zulässigkeit* in dem Sinn ein, dass eine *zulässige Handelsstrategie* unsere Voraussetzungen erfüllt.

Definition 3.1. Eine Handelsstrategie $\overline{\xi}$ mit Wertprozess V heißt *zulässig*, wenn

$$V_0 \leq v, \quad v < \Pi_{\sup(H)}, \tag{3.1a}$$
$$V_t \geq 0, \quad t = 0, \ldots, T, \tag{3.1b}$$
$$\overline{\xi} \text{ ist selbstfinanzierend} \tag{3.1c}$$

gilt. Wir werden der Einfachheit halber im Folgenden mit $\mathcal{V}^z$ die Menge aller Wertprozesse von zulässigen Strategien bezeichnen.

Wir können unser Hedgingproblem nun folgendermaßen formulieren.

Problem 3.2 (Quantilhedgingproblem)**.** Das *Quantilhedgingproblem* besteht darin, eine zulässige Strategie $\overline{\xi^*}$ zu konstruieren, für deren Wertprozess $V^* \in \mathcal{V}^z$

$$P[V_T^* \geq H] = \max_{V \in \mathcal{V}^z} P[V_T \geq H] \tag{3.2}$$

gilt.

Es sei an dieser Stelle - wie bereits in der Einleitung erwähnt - hervorgehoben, dass das Quantilhedgen lediglich mit der Wahrscheinlichkeit eines Verlustes arbeitet, nicht jedoch mit der Höhe. Für die meisten Anwendungen sind vom ökonomischen Standpunkt aus gesehen andere Kriterien besser als die bloße Verwendung dieser Wahrscheinlichkeit. Alternativen hierzu werden im nächsten Abschnitt angeboten.

Zunächst wollen wir aber bei unserem eben formulierten Problem bleiben und das ganze in einem vollständigen Marktmodell entwickeln. Die Menge

$$\{V_T \geq H\}$$

nenne wir in Verbindung mit dem Wertprozess V einer zulässigen Strategie *Erfolgsmenge*. Mit dieser Bezeichnung können wir das Problem 3.2 auf die Konstruktion einer Erfolgsmenge mit maximaler Wahrscheinlichkeit reduzieren.

Proposition 3.3. *Sei P^* das eindeutige äquivalente Martingalmaß in einem vollständigen Marktmodell und $A^* \in \mathcal{F}_T$ maximiere die Wahrscheinlichkeit $P[A]$ über alle Mengen $A \in \mathcal{F}_T$ die der Bedingung*

$$E^*[H \cdot \mathbb{1}_A] \leq v \tag{3.3}$$

genügen. Dann löst die replizierende Strategie $\overline{\xi^*}$ der Knockout-Option

$$H^* := H \cdot \mathbb{1}_{A^*}$$

das Optimierungsproblem 3.2 und A^* stimmt bis auf P-Nullmengen mit der Erfolgsmenge $\{V_T^* \geq H\}$ von $\overline{\xi^*}$ überein.

Beweis. Zunächst sei $V \in \mathcal{V}^z$ der Wertprozess einer beliebigen zulässigen Strategie. Wir bezeichnen mit $A := \{V_T \geq H\}$ die zugehörige Erfolgsmenge. Wegen der Zulässigkeit gilt $V_T \geq 0$ und daher

$$V_T = V_T \left(\mathbb{1}_{\{V_T \geq H\}} + \mathbb{1}_{\{V_T < H\}}\right) \geq V_T \cdot \mathbb{1}_{\{V_T \geq H\}} \geq H \cdot \mathbb{1}_{\{V_T \geq H\}} = H \cdot \mathbb{1}_A.$$

Da wir unsere Betrachtungen zunächst in einem vollständigen Marktmodell machen, ist unser Claim H erreichbar und damit ist V nach Satz 1.1 ein P^*-Martingal. Daher erhalten wir

$$E^*[H \cdot \mathbb{1}_A] \leq E^*[V_T] = E^*[V_0] = V_0 \leq v.$$

A genügt also der Beschränkung durch (3.3) und ist demnach in der Menge enthalten, über die A^* die Wahrscheinlichkeit maximiert und es gilt

$$P[A] \leq P[A^*].$$

Nun betrachten wir die H^* replizierende Handelsstrategie $\overline{\xi^*}$ und ihren Wertprozess V^*. $\overline{\xi^*}$ ist zulässig, da H^* und damit auch $E^*[H|\mathcal{F}_t]$ nichtnegativ ist, die Handelsstrategie als replizierend selbstfinanzierend ist und die Kostenbeschränkung $V_0 = E^*[H^*] = E^*[H \cdot \mathbb{1}_{A^*}] \leq v$ wegen der Voraussetzung (3.3) erfüllt ist. Wenn $\omega \in A^*$ ist, dann folgt $H^* = H \cdot \mathbb{1}_{A^*} \geq H$ und damit gilt

$$A^* \subseteq \{H \cdot \mathbb{1}_{A^*} \geq H\} = \{V_T^* \geq H\}.$$

Wegen dem ersten Teil des Beweises gilt

$$P[V_T^* \geq H] \leq P[A^*]$$

und damit wegen der Monotonie von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$P[A^*] = P[V_T^* \geq H].$$

Es folgt, dass die beiden Mengen A^* und $\{V_T^* \geq H\}$ bis auf P-Nullmengen übereinstimmen und $\overline{\xi^*}$ eine Strategie ist, deren Erfolgsmenge maximale Wahrscheinlichkeit hat. □

In Proposition 3.3 haben wir die Existenz einer solchen optimalen Erfolgsmenge A^* vorausgesetzt. Um sicherzustellen, dass es diese auch tatsächlich gibt, verwenden wir das Lemma von Neyman-Pearson (Proposition 2.2). Wir definieren über die Dichte

$$\frac{dQ^*}{dP^*} := \frac{H}{E^*[H]} \tag{3.4}$$

das neue Maß Q^*. Die Beschränkung (3.3) kann wegen

$$Q^*[A] = \int_A dQ^* = \int_A \frac{dQ^*}{dP^*}\, dP^* = \int_A \frac{H}{E^*[H]}\, dP^* = \int \frac{H \cdot \mathbb{1}_A}{E^*[H]}\, dP^* = \frac{E^*[H \cdot \mathbb{1}_A]}{E^*[H]}$$

und äquivalent dazu

$$E^*[H \cdot \mathbb{1}_A] = E^*[H] \cdot Q^*[A]$$

auch als

$$Q^*[A] \leq \alpha := \frac{v}{E^*[H]} \tag{3.5}$$

geschrieben werden. Eine optimale Erfolgsmenge muss also die Wahrscheinlichkeit $P[A]$ unter der Beschränkung $Q^*[A] \leq \alpha$ maximieren. Sei nun $\frac{dP}{dQ^*}$ die verallgemeinerte Dichte von P bezüglich Q^* im Sinne der Lebesgue-Zerlegung wie in Satz 2.1. Weiters sei

$$c^* := \inf\left\{ c \geq 0 \,\middle|\, Q^*\left[\frac{dP}{dQ^*} > c \cdot E^*[H]\right] \leq \alpha \right\}, \tag{3.6}$$

und

$$A^* := \left\{ \frac{dP}{dQ^*} > c^* \cdot E^*[H] \right\} = \left\{ \frac{dP}{dP^*} > c^* \cdot H \right\}. \tag{3.7}$$

Proposition 3.4. *Gilt für die Menge A^* in (3.7)*

$$Q^*[A^*] = \alpha,$$

dann maximiert A^* die Wahrscheinlichkeit $P[A]$ über alle $A \in \mathcal{F}_T$ die der Beschränkung

$$E^*[H \cdot \mathbb{1}_A] \leq v$$

genügen.

Beweis. Die Bedingung $E^*[H \cdot \mathbb{1}_A] \leq v$ ist äquivalent zu $Q^*[A] \leq \alpha = Q^*[A^*]$. Die Menge A^* hat per Definition die in Proposition 2.2 vorausgesetzte Darstellung von A^0 und daher folgt aus $Q^*[A] \leq Q^*[A^*]$, dass $P[A] \leq P[A^*]$. □

Verbindet man die beiden Propositionen 3.3 und 3.4, dann bekommt man in einem die Existenz einer optimalen Erfolgsmenge und die Darstellung über die Superhedgingstrategie.

Korollar 3.5. *Sei P^* das eindeutige äquivalente Martingalmaß in einem kompletten Marktmodell und für A^* von (3.7) gilt*

$$Q^*[A^*] = \alpha.$$

Dann ist die optimale Strategie, die das Problem 3.2 löst durch die replizierende Strategie der Knockout-Option $H^* = H \cdot \mathbb{1}_{A^*}$ gegeben.

Unsere Lösung für das Optimierungsproblem 3.2 beruht noch auf der Annahme, dass für die Menge A^* von (3.7) $Q^*[A] = \alpha$ gilt. Diese Bedingung ist auf jeden Fall erfüllt, wenn

$$P\left[\frac{dP}{dP^*} = c^* \cdot H\right] = 0$$

gilt. Im Allgemeinen gibt es nicht immer eine Menge A, deren Q^*-Wahrscheinlichkeit exakt α ist. Um dieses Problem zu lösen wollen wir die Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{A^*}$ durch einen sogenannten *verzufälligten Test* ersetzen, eine $\mathcal{F}_T$-messbare Funktion ψ mit Werten in $[0,1]$. Sei $\mathcal{R}$ die Klasse aller dieser Funktionen und betrachten wir das folgende Optimierungsproblem.

Problem 3.6 (Maximierung über verzufälligte Tests)**.** Suche $\psi^* \in \mathcal{R}$, sodass

$$E[\psi^*] = \max\left\{E[\psi]\,|\,\psi \in \mathcal{R} \text{ und } E_{Q^*}[\psi] \leq \alpha\right\},$$

wobei Q^* das in (3.4) definierte Maß ist und $\alpha = \frac{v}{E^*[H]}$ wie in (3.5).

Das verallgemeinerte Neyman-Pearson-Lemma in der Form von Satz 2.3 liefert eine Lösung durch

$$\psi^* = \mathbb{1}_{\left\{\frac{dP}{dP^*} > c^* \cdot H\right\}} + \gamma \cdot \mathbb{1}_{\left\{\frac{dP}{dP^*} = c^* \cdot H\right\}}, \tag{3.8}$$

wobei c^* durch (3.6) definiert ist und γ so gewählt, dass $E_{Q^*}[\psi^*] = \alpha$, also

$$\gamma = \begin{cases} 0 & \text{wenn } P\left[\frac{dP}{dP^*} = c^* \cdot H\right] = 0, \\ \frac{\alpha - Q^*\left[\frac{dP}{dP^*} > c^* \cdot H\right]}{Q^*\left[\frac{dP}{dP^*} = c^* \cdot H\right]} & \text{wenn } P\left[\frac{dP}{dP^*} = c^* \cdot H\right] \neq 0. \end{cases}$$

Definition 3.7. Sei V der Wertprozess einer erreichbaren Strategie $\bar{\xi}$. Die *Erfolgsrate*[1] von $\bar{\xi}$ ist definiert als der verzufälligte Test

$$\psi_V = \mathbb{1}_{\{V_T \geq H\}} + \frac{V_T}{H} \cdot \mathbb{1}_{\{V_T < H\}}.$$

Die Menge $\{\psi_V = 1\}$ stimmt mit der Erfolgsmenge $\{V_T \geq H\}$ von V überein. In der erweiterten Version des ursprünglichen Problems suchen wir eine Strategie, die die erwartete Erfolgsrate $E[\psi_V]$ unter dem Maß P und der Kostenbeschränkung $V_0 \leq v$ maximiert.

[1]engl. success ratio

Satz 3.8. *Angenommen P^* ist das eindeutige Martingalmaß in einem vollständigen Marktmodell. Sei ψ^* gegeben durch (3.8) und $\overline{\xi^*}$ eine replizierende Strategie für den diskontierten Claim $H^* = H \cdot \psi^*$. Dann maximiert die Erfolgsrate ψ_{V^*} von $\overline{\xi^*}$ die erwartete Erfolgsrate $E[\psi_V]$ über alle zulässigen Strategien. Weiters ist die optimale Erfolgsrate ψ_{V^*} P-f.s. gleich ψ^*.*

Beweis. Spezialfall von Satz 3.10. □

Es sei angemerkt, dass aus der Bedingung

$$P\left[\frac{dP}{dP^*} = c^* \cdot H\right] = 0$$

$\psi^* = \mathbb{1}_{A^*}$ mit A^* wie in (3.7) folgt. Daher ist in diesem Fall die gesuchte Strategie $\overline{\xi^*}$ jene aus Korollar 3.5.

Nachdem wir die optimale Hedgingstrategie für vollständige Märkte gefunden haben wollen wir nun mit Hilfe verzufälligter Tests das ganze auch für unvollständige arbitragefreie Märkte tun. Es gilt also ab jetzt $|\mathcal{P}| \geq 1$. Mit dem Begriff der Erfolgsrate und Problem 3.6 können wir nun unsere neues Hedgingproblem formulieren.

Problem 3.9 (Verallgemeinertes Quantilhedgingproblem)**.** Suche eine zulässige Handelsstrategie $\overline{\xi^*}$, sodass für deren Erfolgsrate $\psi_{V^*} \in \mathcal{R}$

$$E[\psi_{V^*}] = \max_{V \in \mathcal{V}^z} E[\psi_V] \tag{3.9}$$

gilt.

Satz 3.10. *Es existiert ein verzufälligter Test ψ^* sodass*

$$\sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[H \cdot \psi^*] = v, \tag{3.10}$$

und der $E[\psi]$ über alle $\psi \in \mathcal{R}$, welche die Beschränkung

$$E^*[H \cdot \psi] \leq v \quad \textit{für alle } P^* \in \mathcal{P} \tag{3.11}$$

erfüllen, maximiert. Weiters ist die Superhedgingstrategie für den modifizierten Claim

$$H^* = H \cdot \psi^*$$

mit Anfangsinvestment $\pi_{\sup}(H^*)$ die Lösung für das Problem 3.9.

Beweis. Sei $\mathcal{R}_0$ die Menge aller $\psi \in \mathcal{R}$ die der Beschränkung (3.11) genügen und sei $\psi_n \in \mathcal{R}_0$ eine Folge sodass

$$E[\psi_n] \longrightarrow \sup_{\psi \in \mathcal{R}_0} E[\psi] \quad \text{für } n \uparrow \infty.$$

Wegen Lemma 1.2 gibt es eine Folge $\tilde{\psi}_n \in \operatorname{conv}\{\psi_n, \psi_{n+1}, \dots\}$ von Konvexkombinationen, die P-f.s. gegen eine Funktion $\tilde{\psi} \in \mathcal{R}$ konvergiert. Es gilt $\tilde{\psi}_n \in \mathcal{R}_0$ für alle n, da die Elemente aus $\mathcal{R}$, die konvexkombiniert werden, alle der Beschränkung (3.11) genügen. Es gilt mit dem Lemma von Fatou (Lemma 1.4), dass

$$E^*[H \cdot \tilde{\psi}] = \int H \cdot \liminf_n \tilde{\psi}_n \, dP^* \le \liminf_n \int H \cdot \tilde{\psi}_n \, dP^* = \liminf_n E^*[H \cdot \tilde{\psi}_n]$$

und daher

$$E^*[H \cdot \tilde{\psi}] \le \liminf_{n \uparrow \infty} E^*[H \cdot \tilde{\psi}_n] \le v \quad \text{für alle } P^* \in \mathcal{P},$$

da $\tilde{\psi}_n$ aus $\mathcal{R}_0$ ist und damit die Beschränkung (3.11) nach Voraussetzung erfüllt. $\tilde{\psi}$ unterliegt offenbar auch der Beschränkung und daher ist $\tilde{\psi} \in \mathcal{R}_0$. Weiters gilt

$$E[\tilde{\psi}] = E[\lim_{n \uparrow \infty} \tilde{\psi}_n] = \lim_{n \uparrow \infty} E[\tilde{\psi}_n], \tag{3.12}$$

da wegen Lemma 1.4 und der Tatsache, dass der Limes mit lim sup und lim inf übereinstimmt

$$\begin{aligned} E[\lim_{n \uparrow \infty} \tilde{\psi}_n] = E[\liminf_{n \uparrow \infty} \tilde{\psi}_n] \le \liminf_{n \uparrow \infty} E[\tilde{\psi}_n] = \lim_{n \uparrow \infty} E[\tilde{\psi}_n], \\ \lim_{n \uparrow \infty} E[\tilde{\psi}_n] = \limsup_{n \uparrow \infty} E[\tilde{\psi}_n] \le E[\limsup_{n \uparrow \infty} \tilde{\psi}_n] = E[\lim_{n \uparrow \infty} \tilde{\psi}_n] \end{aligned}$$

und damit

$$E[\lim_{n \uparrow \infty} \tilde{\psi}_n] \le \lim_{n \uparrow \infty} E[\tilde{\psi}_n] \le E[\lim_{n \uparrow \infty} \tilde{\psi}_n],$$

gilt. Außerdem können wir $\lim_{n \uparrow \infty} E[\tilde{\psi}_n]$ auch über die Darstellung von $\tilde{\psi}_n$ als Konvexkombination mit $\tilde{\psi}_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot \psi_{n_i}$, $n_i \ge n$ und $\sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n = 1$ als

$$\lim_{n \uparrow \infty} E[\tilde{\psi}_n] = \lim_{n \uparrow \infty} E\left[\sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot \psi_{n_i}\right] = \lim_{n \uparrow \infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot E[\psi_{n_i}]$$

anschreiben und mit den beiden Abschätzungen

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot E[\psi_{n_i}] \le \lim_{n \uparrow \infty} \sup_{m \ge n} E[\psi_m] = \lim_{n \uparrow \infty} E[\psi_n]$$

und

$$\lim_{n \uparrow \infty} \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot E[\psi_{n_i}] \ge \lim_{n \uparrow \infty} \inf_{m \ge n} E[\psi_m] = \lim_{n \uparrow \infty} E[\psi_n]$$

gilt

$$\lim_{n \uparrow \infty} E[\tilde{\psi}_n] = \lim_{n \uparrow \infty} E[\psi_n]. \tag{3.13}$$

Nun gilt mit (3.12) und (3.13)

$$E[\tilde{\psi}] = \lim_{n\uparrow\infty} E[\tilde{\psi_n}] = \lim_{n\uparrow\infty} E[\psi_n] = \sup_{\psi\in\mathcal{R}_0} E[\psi], \tag{3.14}$$

sodass $\psi^* := \tilde{\psi}$ der gesuchte maximierende Test ist. Einen maximierenden Test haben wir nun schon identifiziert. Als nächstes wollen wir zeigen, dass (3.10) für ψ^* auch erfüllt ist. $P[\psi^* = 1] = 1$ ist unmöglich, da sonst

$$\begin{aligned}\sup_{P^*\in\mathcal{P}} E^*[H\cdot\psi^*] &= \sup_{P^*\in\mathcal{P}} \int H\cdot\psi^*\,dP^* = \sup_{P^*\in\mathcal{P}} \int H\,dP^* \\ &= \sup_{P^*\in\mathcal{P}} E^*[H] = \Pi_{\sup}(H) > v,\end{aligned}$$

was im Widerspruch zur Forderung (3.11) steht. Gilt $\sup_{P^*\in\mathcal{P}} E^*[H\cdot\psi^*] < v$, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\psi_\varepsilon := \varepsilon + (1-\varepsilon)\cdot\psi^* \in \mathcal{R}_0$ und die Erwartung $E[\psi_\varepsilon]$ muss strikt größer sein als $E[\psi^*]$. Dies steht aber im Widerspruch zur Maximalität von $E[\psi^*]$ und damit ist auch die Forderung (3.10) erfüllt.

Nun zeigen wir, dass die Erfolgsraten aller zulässigen Strategien in $\mathcal{R}_0$ enthalten sind, wodurch ψ^* auch über diese maximiert. Sei $\overline{\xi}$ eine zulässige Strategie. Wenn ψ_V die zugehörige Erfolgsrate ist, dann gilt

$$\begin{aligned}H\cdot\psi_V &= H\cdot\left(\mathbb{1}_{\{V_T\geq H\}} + \frac{V_T}{H}\cdot\mathbb{1}_{\{V_T<H\}}\right) = H\cdot\mathbb{1}_{\{V_T\geq H\}} + V_T\cdot\mathbb{1}_{\{V_T<H\}} \\ &= \begin{cases} H & \text{wenn } V_T \geq H, \\ V_T & \text{wenn } V_T < H \end{cases} = H\wedge V_T \leq V_T.\end{aligned}$$

Da V ein $\mathcal{P}$-Martingal ist gilt für alle $P^*\in\mathcal{P}$

$$E^*[H\cdot\psi_V] \leq E^*[V_T] = V_0 \leq v. \tag{3.15}$$

Daher ist ψ_V aus $\mathcal{R}_0$ und es folgt, dass

$$E[\psi_V] \leq E[\psi^*]. \tag{3.16}$$

Betrachten wir die Superhedginstrategie $\overline{\xi^*}$ von $H^* = H\cdot\psi^*$ und sei V^* ihr Wertprozess. $\overline{\xi^*}$ ist zulässig, da

$$V_T^* \geq H^* = H\cdot\psi^* \underbrace{\geq}_{H,\psi^*\geq 0} 0$$

und

$$V_0^* = \Pi_{\sup}(H^*) = \sup_{P^*\in\mathcal{P}} E^*[H\cdot\psi^*] = v.$$

Daher gilt wegen (3.16) für ψ_{V^*}

$$E[\psi_{V^*}] \leq E[\psi^*]. \tag{3.17}$$

Weiters wissen wir, dass H^* von V_T^* dominiert wird, daher gilt

$$H \cdot \psi_{V^*} = H \wedge V_T^* \geq H \wedge H^* = H \cdot \psi^*.$$

Daher wird ψ^* auf der Menge $\{H > 0\}$ von ψ_{V^*} dominiert. Weiters ist jede Erfolgsrate wegen

$$\mathbb{1}_{\{H=0\}} \cdot \psi_V = \mathbb{1}_{\{H=0\}} \cdot \left(\mathbb{1}_{\{V_T \geq H\}} + \frac{V_T}{H} \cdot \mathbb{1}_{\{V_T < H\}} \right) = \mathbb{1}_{\{V_T \geq 0\}} = 1$$

auf $\{H = 0\}$ gleich eins und wir erhalten, dass $\psi_{V^*} \geq \psi^*$ P-fast sicher. Zusammen mit (3.17) folgt daher, dass die zwei verzufälligten Tests ψ_{V^*} und ψ^* P-fast sicher überall übereinstimmen müssen. Daher löst $\overline{\xi^*}$ das Hedgingproblem 3.9. □

3.3 Hedgen mit minimalem Verlustrisiko

Wie in Abschnitt 3.1 ist die Grundlage unserer Überlegungen, dass eine gänzliche Elimination des Risikos durch eine Superhedgingstrategie Kosten von

$$\pi_{\sup}(H) = \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[H]$$

verursachen würde. Der Verkäufer der Option auf das Asset möchte aber maximal den Betrag

$$v \in (0, \pi_{\sup}(H))$$

zur Absicherung investieren. Er nimmt also für das geringere Risiko, wie im vorigen Abschnitt, ein gewisses Risiko in Kauf um dafür weniger investieren zu müssen. Jede partielle Hedgingstrategie, deren Wertprozess der Kostenbeschränkung $V_0 \leq v$ genügt generiert zumindest den nichttrivialen Verlust von

$$(H - V_T)^+ = \begin{cases} 0 & \text{wenn } V_T \geq H, \\ H - V_T & \text{wenn } V_T < H. \end{cases}$$

In Abschnitt 3.2 haben wir uns eine Hedgingstrategie konstruiert, welche die Verlustwahrscheinlichkeit eines erfolgreichen Hedgings

$$P[V_T \geq H]$$

über alle zulässigen Strategien im Sinne der Definition 3.1 maximiert und damit die Wahrscheinlichkeit des hier entstehenden Verlustes

$$P[V_T < H]$$

über alle zulässigen Strategien minimiert. In diesem Kapitel wollen wir nun den Verlust mit Hilfe einer *Verlustfunktion* darstellen, einer monoton wachsenden nicht konstanten Funktion $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir nehmen weiters an, dass

$$\ell(x) = 0 \quad \text{für } x \leq 0 \quad \text{und} \quad E\left[\ell(H)\right] < \infty. \tag{3.18}$$

Proposition 3.11. *Sei ℓ eine Verlustfunktion, welche die obigen Annahmen (3.18) erfüllt. Dann gilt für eine $\mathcal{F}_T$-messbare nichtnegative Zufallsvariable Y*

$$E[\ell(H - Y)] = E\left[\ell\left((H - Y)^+\right)\right]. \tag{3.19}$$

Beweis. Wir können

$$E[\ell(H - Y)]$$

anschreiben als

$$\begin{aligned}
\int \ell(H - Y)\, dP &= \int_{\{H>Y\}} \ell(H - Y)\, dP + \int_{\{H\leq Y\}} \underbrace{\ell(H - Y)}_{\ell(x)=0,\ x\leq 0}\, dP \\
&= \int \mathbb{1}_{\{H>Y\}} \cdot \ell(H - Y)\, dP \\
&= \int \ell\left(\mathbb{1}_{\{H>Y\}} \cdot (H - Y)\right)\, dP \\
&= \int \ell\left((H - Y)^+\right)\, dP \\
&= E\left[\ell\left((H - Y)^+\right)\right],
\end{aligned}$$

womit wir die gewünschte Gleichheit gezeigt haben. □

Definition 3.12. Sei ℓ eine Verlustfunktion, welche die obigen Annahmen (3.18) erfüllt. Das *Verlustrisiko einer zulässigen Strategie* mit Wertprozess V ist definiert als die Erwartung

$$E[\ell(H - V_T)] = E\left[\ell\left((H - V_T)^+\right)\right]$$

des Verlustes gewichtet durch die Verlustfunktion ℓ.

Unser Ziel ist es nun, das Verlustrisiko über alle zulässigen Strategien zu minimieren. Es sei hier angemerkt, dass die Definition der Zulässigkeit in dieser Arbeit (Definition 3.1) die Kostenbeschränkung $V_0 \leq v$ bereits inkludiert. Alternativ dazu könnten wir die Kosten unter einer gegebenen Beschränkung für das Verlustrisiko minimieren. Anders gesagt, dass Problem besteht darin Strategien zu konstruieren, die *effizient* in Bezug auf den Trade-Off zwischen Kosten und Verlustrisiko[2] sind. Das verallgemeinert die vorherigen Überlegungen zum Quantilhedgen in Abschnitt 3.2 insoweit, dass dort das Verlustrisiko in Bezug auf eine nichtkonvexe Verlustfunktion

$$\ell(x) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

minimiert wurde.

Wie im vorherigen Abschnitt 3.2 erfolgt hier auch die Konstruktion der optimalen Hedgingstrategie in zwei Schritten. Zuerst suchen wir eine Zufallsvariable Y^*, sodass

$$E[\ell(H - Y^*)] = \min E[\ell(H - Y)]$$

[2]engl. Kosten-Nutzen-Abwägung

wobei das Minimum über all jene $\mathcal{F}_T$-messbaren Zufallsvariablen $Y \geq 0$ gebildet wird, die der Beschränkung

$$\sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[Y] \leq v$$

genügen. Wenn Y^* dieses Problem löst, dann auch $\tilde{Y} := H \wedge Y^*$, da wegen

$$\begin{aligned}(H - \tilde{Y}) = (H - H \wedge Y^*) &= \begin{cases} 0 & \text{auf } \{H < Y^*\}, \\ H - Y^* & \text{auf } \{H \geq Y^*\} \end{cases} \\ &= (H - Y^*) \cdot \mathbb{1}_{\{H \geq Y^*\}} = (H - Y^*)^+ \end{aligned}$$

und Proposition 3.11

$$E[\ell(H - Y^*)] = E[\ell(H - \tilde{Y})]$$

gilt und auch $\tilde{Y}$ wegen

$$\sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[\tilde{Y}] = \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[H \wedge Y^*] \leq \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[Y^*] \leq v$$

der geforderten Beschränkung genügt. Wir können nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit Y^* mit $\tilde{Y}$ identifizieren und es gilt $0 \leq Y^* \leq H$ oder, äquivalent dazu, dass $Y^* = H \cdot \psi^*$ für einen verzufälligten Test ψ^*, aus der Menge $\mathcal{R}$ aller $\mathcal{F}_T$-messbaren Zufallsvariablen mit Werten in $[0, 1]$. Unser statisches Optimierungsproblem kann nun folgendermaßen formuliert werden.

Problem 3.13 (Optimierungsproblem für minimales Verlustrisiko)**.** Finde einen verzufälligten Test $\psi^* \in \mathcal{R}$ der das *Verlustrisiko*

$$E\left[\ell\left(H \cdot (1 - \psi)\right)\right] \tag{3.22}$$

über alle $\psi \in \mathcal{R}$ unter der Beschränkung

$$E^*[H \cdot \psi] \leq v \quad \text{für alle } P^* \in \mathcal{P} \tag{3.23}$$

minimiert.

Der nächste Schritt besteht darin den Wert V_T zum Endzeitpunkt einer zulässigen Strategie an das Optimale Profil $H \cdot \psi^*$ anzupassen. Nehmen wir daher an diesem Punkt an, dass die Existenz eines optimalen ψ^* von Problem 3.13 gesichert ist und konstruieren wir dazu die optimale Strategie.

Satz 3.14. *Sei ψ^* ein verzufälligter Test, der das Optimierungsproblem 3.13 löst. Eine Superhedgingstrategie $\overline{\xi^*}$ für den modifizierten diskontierten Claim*

$$H^* := H \cdot \psi^*$$

mit Anfangsinvestment $\pi_{\sup}(H^*)$ hat minimales Verlustrisiko über alle zulässigen Strategien $\overline{\xi}$, also alle Handelsstrategien, für deren Wertprozess $V \in \mathcal{V}^z$ gilt.

Beweis. Der Beweis erweitert das letzte Argument des Beweises von Satz 3.10. Zunächst betrachten wir eine zulässige Strategie $\overline{\xi}$. Die zugehörige Erfolgsrate bezeichnen wir wie in Abschnitt 3.2 mit

$$\psi_V = \mathbb{1}_{\{V_T \geq H\}} + \frac{V_T}{H} \cdot \mathbb{1}_{\{V_T < H\}}.$$

Es folgt wie in (3.15), dass ψ_V der Beschränkung

$$E^*[H \cdot \psi_V] \leq v \quad \text{für alle } P^* \in \mathcal{P}$$

und daher (3.23) genügt. Wegen

$$\begin{aligned} H \cdot (1 - \psi_V) &= H - H \cdot \left(\mathbb{1}_{\{V_T \geq H\}} + \frac{V_T}{H} \cdot \mathbb{1}_{\{V_T < H\}} \right) \\ &= H - H \cdot \mathbb{1}_{\{V_T \geq H\}} - V_T \cdot \mathbb{1}_{\{V_T < H\}} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{auf } \{V_T \geq H\} \\ H - V_T & \text{auf } \{V_T < H\} \end{cases} \\ &= (H - V_T)^+ \end{aligned}$$

können wir aus der Optimalität von ψ^*, also der Tatsache, dass ψ^* das Verlustrisiko minimiert, und wegen Proposition 3.11 eine untere Schranke für das Verlustrisiko von $\overline{\xi}$ finden, nämlich

$$E[\ell(H - V_T)] = E\left[\ell\left((H - V_T)^+\right)\right] = E[\ell(H \cdot (1 - \psi_V))] \geq E[\ell(H \cdot (1 - \psi^*))].$$

Nun betrachten wir die Superhedgingstrategie $\overline{\xi^*}$ und ihren Wertprozess V^*. $\overline{\xi^*}$ ist selbstfinanzierend, es gilt

$$V_T^* \geq H^* \geq 0,$$

da $\overline{\xi^*}$ eine Superhedgingstrategie ist und sie erfüllt wegen

$$V_0^* = \pi_{\sup}(H^*) = \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[H \cdot \psi^*] \leq v$$

die gewünschte Kostenbeschränkung. Die Superhedgingstrategie des Claims H^* ist daher zulässig. Oben haben wir eine untere Schranke für alle zulässigen Strategien gefunden, da $\overline{\xi^*}$ auch zulässig ist gilt nun

$$E[\ell(H - V_T^*)] = E[\ell(H \cdot (1 - \psi_{V^*}))] \geq E[\ell(H \cdot (1 - \psi^*))]. \tag{3.24}$$

Wie oben schon erwähnt gilt

$$V_T^* \geq H^* = H \cdot \psi^*,$$

da $\overline{\xi^*}$ eine Superhedgingstrategie ist und damit gilt

$$H \cdot \psi_{V^*} = H \cdot \mathbb{1}_{\{V_T^* \geq H\}} + V_T^* \cdot \mathbb{1}_{\{V_T^* < H\}} = H \wedge V_T^* \geq H \wedge H^* \geq H \cdot \psi^*.$$

woraus folgt, dass

$$\psi_{V^*} \geq \psi^* \quad P\text{-f.s.}$$

Damit wird die Ungleichung in (3.24) eine Gleichung und die Behauptung folgt. □

Kehren wir nun zum Optimierungsproblem 3.13 zurück. Wir fangen damit an, den Spezialfall von Risikoaversion in Hinblick auf den Verlust zu betrachten. An dieser Stelle sei angemerkt, dass wir bei Risikoaversion eine konkave Nutzenfunktion haben. Wir werden in unserem konkreten Modell konvexe Verlustfunktionen verwenden, was genau Risikoaversion entspricht, da sie konkave Nutzenfunktionen sind, die an der Abszisse gespiegelt wurden.

Proposition 3.15. *Wenn die Verlustfunktion ℓ konvex ist, dann gibt es einen verzufälligten Test $\psi^* \in \mathcal{R}$, der das Verlustrisiko*

$$E[\ell(H \cdot (1-\psi))]$$

über alle $\psi \in \mathcal{R}$ unter der Beschränkung

$$E^*[H \cdot \psi] \leq v \quad \text{für alle } P^* \in \mathcal{P} \tag{3.25}$$

minimiert. Ist ℓ strikt konvex auf $[0, \infty)$, dann ist ψ^* auf $\{H > 0\}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Sei $\mathcal{R}_0$ die Menge aller verzufälligten Tests, die der Beschränkung (3.25) genügen. Sei eine Folge $\psi_n \in \mathcal{R}_0$ so, dass $E[\ell(H \cdot (1-\psi_n))]$ gegen das Infimum des Verlustrisikos konvergiert und sei $\tilde{\psi}_n \in \text{conv}\{\psi_\text{n}, \psi_\text{n+1}, \ldots\}$ nach Lemma 1.2 eine Folge von Konvexkombinationen von ψ_n, die P-f.s. gegen ein $\tilde{\psi} \in \mathcal{R}$ konvergieren. Da ℓ stetig ist folgt aus dem Lemma von Fatou (Lemma 1.4), dass

$$\begin{aligned} E[\ell(H \cdot (1-\tilde{\psi}))] &= E[\ell(H \cdot (1-\lim_{n\uparrow\infty} \tilde{\psi}_n))] = E[\lim_{n\uparrow\infty} \ell(H \cdot (1-\tilde{\psi}_n))] \\ &= E[\liminf_{n\uparrow\infty} \ell(H \cdot (1-\tilde{\psi}_n))] \leq \liminf_{n\uparrow\infty} E[\ell(H \cdot (1-\tilde{\psi}_n))]. \end{aligned}$$

Wir können $\tilde{\psi}_n$ als Konvexkombination $\tilde{\psi}_n = \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot \psi_{n_i}$ darstellen und damit gilt

$$1-\tilde{\psi}_n = 1 - \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot \psi_{n_i} = \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n - \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \psi_{n_i} = \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot (1-\psi_{n_i}).$$

Wir können also auch $1-\tilde{\psi}_n$ als Konvexkombination darstellen. Für festes ω sei nun $g(\cdot, \omega)$ die lineare Funktion $g(x, \omega) = H(\omega) \cdot x$. Die Hintereinanderausführung einer linearen und einer konvexen Funktion ist wieder konvex. Daher definieren wir für festes ω

$$f(\cdot, \omega) := f \circ g(\cdot, \omega).$$

Da f konvex ist gilt für festes ω

$$\begin{aligned} \ell(H \cdot (1-\tilde{\psi}_n)) &= f(1-\tilde{\psi}_n, \omega) = f\left(\sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot (1-\psi_{n_i}), \omega\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot f(1-\psi_{n_i}, \omega) = \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot \ell(H \cdot (1-\psi_{n_i})). \end{aligned}$$

Das lässt sich für den Erwartungswert fortsetzen und es gilt

$$E[\ell(H \cdot (1-\tilde{\psi}_n))] \leq \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot E[\ell(H \cdot (1-\psi_{n_i}))] \tag{3.26a}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m(n)} \alpha_i^n \cdot \sup_{m \geq n} E[\ell(H \cdot (1-\psi_m))] \tag{3.26b}$$

$$= \sup_{m \geq n} E[\ell(H \cdot (1-\psi_m))]. \tag{3.26c}$$

Betrachtet man das ganze im Grenzwert, so gilt nun

$$\lim_{n\uparrow\infty} E[\ell(H \cdot (1-\tilde{\psi}_n))] \leq \lim_{n\uparrow\infty} E[\ell(H \cdot (1-\psi_n))].$$

Insgesamt haben wir also

$$E[\ell(H \cdot (1-\tilde{\psi}))] \leq \lim_{n\uparrow\infty} E[\ell(H \cdot (1-\psi_n))] = \inf_{\psi \in \mathcal{R}_0} E[\ell(H \cdot (1-\psi))]$$

und daher ist $\tilde{\psi}$ eine unter Schranke für das Verlustrisiko.

Aus Lemma 1.4 folgt, dass für alle $P^* \in \mathcal{P}$

$$E^*[H \cdot \tilde{\psi}] = E^*[\liminf_{n\uparrow\infty} H \cdot \tilde{\psi}] \leq \liminf_{n\uparrow\infty} E^*[H\,\tilde{\psi}_n] \leq v.$$

Offenbar erfüllt $\tilde{\psi}$ die Beschränkung (3.25) und ist daher in $\mathcal{R}_0$ enthalten. Da $\tilde{\psi}$ eine untere Schranke für das Verlustrisiko ist und $\tilde{\psi} \in \mathcal{R}_0$ haben wir unseren gesuchten Minimierer über alle $\psi \in \mathcal{R}_0$ gefunden. Wir können nun $\psi^* := \tilde{\psi}$ als den gewünschten minimierenden Test festlegen. Ist ℓ strikt konvex, so ist die Konvexungleichung in (3.26) scharf. Da allerdings $\tilde{\psi} \in \mathcal{R}_0$ kann im Limes nicht

$$\lim_{n\uparrow\infty} E[\ell(H \cdot (1-\tilde{\psi}_n))] < \inf_{\psi \in \mathcal{R}_0} E[\ell(H \cdot (1-\psi))]$$

gelten, denn dann wäre $\inf_{\psi \in \mathcal{R}_0} E[\ell(H \cdot (1-\psi))]$ nicht die untere Schranke, die es per Definition des Infimums ist. Daher muss im Limes Gleichheit gelten und $\psi^* = \tilde{\psi}$ ist eindeutig bestimmt, da ansonsten für alle Folgenglieder die Ungleichung scharf gilt. □

Zusammen folgt aus Proposition 3.15 und Satz 3.14, dass es in einem allgemeinen arbitragefreien Marktmodell genau eine optimale Hedgingstrategie unter Risikoaversion gibt.

Korollar 3.16. *Sei ℓ eine auf $[0,\infty)$ strikt konvexe Verlustfunktion. Dann gibt es eine zulässige Strategie, die optimal in dem Sinn ist, dass sie dass Verlustrisiko über alle zulässigen Strategien minimiert. Weiters benötigt jede optimale Strategie genau ein Anfangsinvestment von v und ihre Erfolgsrate ist P-f.s. gleich*

$$\psi^* \cdot \mathbb{1}_{\{H>0\}} + \mathbb{1}_{\{H=0\}},$$

wobei ψ^* die Lösung des statischen Problems 3.13 ist.

Beweis. Eine solche optimale Strategie existiert, denn wegen Proposition 3.15 gibt es ein $\psi^* \in \mathcal{R}$, welches das Problem 3.13 löst und damit hat nach Satz 3.14 die Superhedgingstrategie $\overline{\xi^*}$ des Claims $H^* := H \cdot \psi^*$ minimales Verlustrisiko. Da ℓ nach Voraussetzung auf $[0, \infty)$ strikt konvex ist, ist es auf $\{H > 0\}$ eindeutig bestimmt. Weiters gilt für die Erfolgsrate von $\overline{\xi^*}$, dass

$$\psi^*(\{H = 0\}) = \left(\mathbb{1}_{\{V_T^* \geq H\}} + \frac{V_T^*}{H} \cdot \mathbb{1}_{\{V_T^* < H\}}\right)(\{H = 0\}) = 1.$$

Da ψ^* das Verlustrisiko über die verzufälligten Tests minimiert gilt

$$E[\ell(H - H \cdot \psi^*)] \leq E[\ell(H - H \cdot \psi_{V^*})],$$

anders angeschrieben als

$$\int \ell(H - H \cdot \psi^*)\, dP \leq \int \ell(H - H \cdot \psi_{V^*})\, dP.$$

Da ψ^* und ψ_{V^*} aus $\mathcal{R}$ sind und damit Werte in $[0, 1]$ haben sind beide Integranden auf $\{H > 0\}$ nichtnegativ und deshalb können wir folgern, dass

$$\ell(H - H \cdot \psi^*) \leq \ell(H - H \cdot \psi_{V^*}) \quad P\text{-f.s.}$$

Da ℓ streng monoton ist können wir auch

$$H - H \cdot \psi^* \leq H - H \cdot \psi_{V^*} \quad P\text{-f.s. auf } \{H > 0\}$$

schreiben und äquivalent dazu

$$H \cdot \psi_{V^*} \leq H \cdot \psi^* \quad P\text{-f.s. auf } \{H > 0\}.$$

Da man $H \cdot \psi_{V^*}$ auch als

$$H \cdot \psi_{V^*} = H \cdot \left(\mathbb{1}_{\{V_T^* \geq H\}} + \frac{V_T^*}{H} \cdot \mathbb{1}_{\{V_T^* < H\}}\right) = H \wedge V_T^*$$

schreiben kann und weil für den Wertprozess der Superhedgingstrategie

$$V_T^* \geq H^* = H \cdot \psi^*$$

und wegen $\psi^* \in [0, 1]$

$$H \geq H^* = H \cdot \psi^*$$

gilt kann man insgesamt

$$H \cdot \psi_{V^*} = H \wedge V_T^* \leq H \cdot \psi^* \leq H \wedge V_T^* = H \cdot \psi_{V^*} \quad P\text{-f.s. auf } \{H > 0\}$$

schreiben und damit gilt auf $\{H > 0\}$

$$\psi_{V^*} = \psi^* \quad P\text{-f.s.},$$

womit wir unsere Darstellung der Erfolgsrate als

$$\psi_{V^*} = \psi^* \cdot \mathbb{1}_{\{H>0\}} + \mathbb{1}_{\{H=0\}}$$

gezeigt haben.

Um das benötigte Anfangsinvestment von v zu beweisen müssen wir nun zeigen, dass

$$\sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[H \cdot \psi^*] = v$$

gilt. Angenommen es wäre nicht so, dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\psi_\varepsilon := \varepsilon + (1-\varepsilon) \cdot \psi^*$ ebenfalls der Beschränkung (3.23) genügt. Da wir $v < \pi_{\sup}(H)$ voraussetzen wissen wir, dass $\psi^* \not\equiv 1 \not\equiv \psi_\varepsilon$. Nun gilt

$$\begin{aligned} H \cdot (1 - \psi_\varepsilon) &= H - H \cdot \psi_\varepsilon = H - H \cdot (\varepsilon + (1-\varepsilon) \cdot \psi^*) \\ &= H - H \cdot \varepsilon - H \cdot (1-\varepsilon) \cdot \psi^* \\ &= H \cdot (1-\varepsilon) - H \cdot (1-\varepsilon) \cdot \psi^* \\ &= H \cdot (1-\varepsilon) \cdot (1-\psi^*) \\ &< H \cdot (1-\psi^*) \end{aligned}$$

und damit wegen der strengen Monotonie von ℓ

$$\ell(H \cdot (1-\psi_\varepsilon)) < \ell(H \cdot (1-\psi^*))$$

und daher auch

$$E[\ell(H \cdot (1-\psi_\varepsilon))] < E[\ell(H \cdot (1-\psi^*))].$$

Offenbar haben wir mit ψ_ε das minimale Verlustrisiko unterschritten, was allerdings im Widerspruch zur Minimalität des Verlustrisikos unter ψ^* steht. Daher gilt

$$\sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[H \cdot \psi^*] = v.$$

Da der Wertprozess V^* der optimalen Strategie ein $\mathcal{P}$-Martingal ist und da

$$V_T^* \geq H \cdot \psi_{V^*} = H \cdot \psi^*$$

können wir aus obigem folgern, dass

$$v \geq V_0^* = \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[V_T^*] \geq \sup_{P^* \in \mathcal{P}} E^*[H\, \psi^*] = v.$$

Insgesamt gilt also $V_0^* = v$ und wir haben das benötigte Anfangsinvestment gezeigt. □

Neben der allgemeinen Existenzaussage von Proposition 3.15, ist es möglich eine explizite Formel für die optimale Lösung des statischen Problems 3.13 anzugeben, wenn das Marktmodell vollständig ist. Rufen wir uns in Erinnerung, dass wir annehmen, die Verlustfunktion $\ell(x)$ verschwindet für $x \leq 0$. Zusätzlich nehmen wir an, dass

$$\ell \text{ strikt konvex und stetig differenzierbar auf } (0,\infty)$$

ist. Dann ist die Ableitung ℓ' von ℓ streng monoton wachsend auf $(0,\infty)$. Sei J die auf dem Bild von ℓ' definierte zu ℓ' inverse Funktion, also auf dem Intervall (a,b) wobei $a := \lim_{x\downarrow 0} \ell'(x)$ und $b := \lim_{x\uparrow\infty} \ell'(x)$. Wir erweitern J zu einer Funktion $J^+ : [0,\infty] \to [0,\infty]$ indem wir

$$J^+(y) := \begin{cases} +\infty, & \text{für } y \geq b, \\ 0, & \text{für } y \leq a, \end{cases}$$

festlegen. Von jetzt an nehmen wir auch an, dass

$$\mathcal{P} = \{P^*\},$$

also, dass wir uns in einem vollständigen Marktmodell befinden. Die Dichte von P^* schreiben wir als

$$\varphi^* := \frac{dP^*}{dP}.$$

Satz 3.17. *Unter den obigen Annahmen ist die Lösung des statischen Optimierungsproblem 3.13 durch*

$$\psi^* = 1 - \frac{J^+(c\,\varphi^*)}{H} \wedge 1 \quad P\text{-f.s. auf } \{H > 0\}$$

gegeben. Hierbei ist c eine Konstante, die durch die Bedingung $E^*[H \cdot \psi^*] = v$ festgelegt wird.

Beweis. Das Problem ist vom selben Typ wie die in Section 3.3 [1] betrachteten. Es kann auf Korollar 1.9 reduziert werden indem man die zufällige Nutzenfunktion

$$u(x,\omega) := -\ell(H(\omega) - x), \quad 0 \leq x \leq H(\omega)$$

betrachtet. Das Verlustrisiko $E[\ell(H - Y)]$ stimmt mit dem negativen erwarteten Nutzen $-E[u(Y,\cdot)]$ für jedes Auszahlungsprofil Y mit $0 \leq Y \leq H$ überein. Weiters hat unser Marktmodell, da es vollständig ist wegen Satz 1.3 eine endliche Struktur und somit sind alle Integrabilitätsbedingungen automatisch erfüllt. Daher folgt aus Korollar 1.9, dass das optimale Profil $H^* := Y^*$, das den erwarteten Nutzen $E[u(Y,\cdot)]$ unter der Beschränkung $0 \leq Y \leq H$ und $E^*[Y] \leq v$ maximiert, durch

$$H^*(\omega) = I^+(c\,\varphi^*(\omega), \omega) \wedge H(\omega) = (H(\omega) - J^+(c\,\varphi^*(\omega)))^+$$

gegeben ist. Dividiert man durch H kommt man auf die Formel für den optimalen verzufälligten Test ψ^*, denn dann gilt

$$\begin{aligned} \psi^* = \left(1 - \frac{J^+(c\,\varphi^*)}{H}\right)^+ &= \begin{cases} 1 - \frac{J^*(c\,\varphi^*)}{H}, & \text{wenn } \frac{J^+(c\,\varphi^*)}{H} < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \\ &= 1 - \frac{J^+(c\,\varphi^*)}{H} \wedge 1 \quad P\text{-f.s. auf } \{H > 0\}. \end{aligned}$$

□

Korollar 3.18. *Sei mit den Voraussetzungen von Satz 3.17 das objektive Maß P gleich dem Martingalmaß P^*. Dann hat der modifizierte diskontierte Claim die einfache Form*

$$H^* = H\,\psi^* = (H - J^+(c^*))^+.$$

Beweis. Die Dichte $\varphi^* = \frac{dP^*}{dP^*}$ ist dann klarerweise die Identität. □

An dieser Stelle sei für den interessierten Leser auf die Beispiele auf Seite 392 bis 396 in [1] hingewiesen, die für verschiedene Verlustfunktionen ψ^* beziehungsweise H^* explizit angeben. Auf eine Anführung wird hier verzichtet um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu sprengen. Wir sind bereits mit der Existenzaussage einer Lösung für das Quantilhedgen und für das Hedgen mit minimalem Verlustrisiko zufrieden. Für vollständige Märkte können wir scheinbar sehr einfach explizite Lösungen angeben. Sehr erfreulich ist die Tatsache, dass wir, wenn wir unseren verzufälligten Test ψ^*, der das Problem 3.6 beziehungsweise das Problem 3.13 löst, gefunden haben, einen Claim H^* aufstellen können, auf den wir die bisher erlernte Theorie über das Superhedging eins zu eins anwenden können. Entscheidend bei diesen ganzen Überlegungen ist, wie man dieses Risiko, dass der Investor bereit ist einzugehen, definiert beziehungsweise misst. Hierfür haben wir in den letzten beiden Abschnitt zwei mögliche Betrachtungsweisen geliefert.

Literaturverzeichnis

[1] Hans Föllmer, Alexander Schied: *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*, 2011.

[2] Kusolitsch, Norbert: *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie - Eine Einführung*, 2011.