



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
WIEN

Vienna University of Technology

---

# Verbindung stetiger und diskreter Pfad-abhängiger Optionen

---

Seminar aus Finanz- und Versicherungsmathematik  
Wintersemester 2014/2015

**Autor:** Filip Jukic, 1127277

**Betreuer:** Dr. Stefan Gerhold

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Abstrakt</b>  | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Einleitung</b>                                      | <b>3</b>  |
| <b>3</b> | <b>Stetigkeitskorrekturen</b>                          | <b>5</b>  |
| <b>4</b> | <b>Baum-Methoden für diskrete Optionen</b>             | <b>11</b> |
| 4.1      | Baum-Methoden für diskrete Barrier-Optionen . . . . .  | 11        |
| 4.2      | Baum-Methoden für diskrete Lookback-Optionen . . . . . | 16        |
| 4.3      | Baum-Methoden für stetige Lookback-Optionen . . . . .  | 18        |
| 4.4      | Zusammenfassung . . . . .                              | 21        |
| <b>5</b> | <b>Literaturverzeichnis</b>                            | <b>24</b> |

# Kapitel 1

## Abstrakt

Dieser Artikel entwickelt Methoden zum Verknüpfen der Preise von diskreten und stetigen Pfad-abhängigen Optionen, die empfindlich auf Veränderungen des Basisobjektes sind. Die Verbindung kann in Form von Änderungen einer Grenze, des Strikes, oder der Extremwerte der Preise auftreten. Diese Korrekturen erlauben uns geschlossene Lösungen für stetige Optionspreise zur Approximation ihrer diskreten Gegensätze zu verwenden. Des Weiteren entwickeln wir Baum-Methoden in diskreter Zeit und für diskrete Zustände zur Bestimmung des genauen Preises von diskreten und stetigen Optionen. In mehreren Fällen wird die Baum-Methode Korrekturen verwenden, die auf der Verbindung zwischen Optionen mit stetigem und diskretem Preis basieren, wodurch sich die Konvergenz zum tatsächlichen Preis verbessert.

# Kapitel 2

## Einleitung

Wir wollen nun die Methoden zur Verknüpfung von Optionen mit stetigem und diskretem Preis entwickeln. Die Auszahlung bei der stetigen Version hängt von dem Preis des Basisobjektes in stetiger Zeit, ab, während die Auszahlung bei der diskreten Version von den Preisen des Basisobjektes zu endlich vielen Zeitpunkten abhängt.

Bei dem Zusammenhang von Optionen mit stetigem und diskretem Preis stellen sich unter anderem folgende Fragen auf:

- Fast alle geschlossenen Ausdrücke, die zur Preisbestimmung von Optionen verwendet werden basieren auf stetigen Zeit-Wegen. So stellt sich die Frage, wie man eine stetige Formel zur Approximation diskreter Preise aufstellt.
- Zur Evaluierung der Preise diskreter Optionen sind numerische Methoden notwendig. Diese basieren grundsätzlich auf diskreter Zeit, jedoch ist diese um einiges feiner aufgeteilt als unsere für Optionen definierten Zeitintervalle. Daher involviert die numerische Preisbestimmung von diskreten Optionen 2 diskrete Zeitintervalle:
  1. Die Intervalle zwischen den Preisfestsetzungen, welche die Auszahlung der Option bestimmen und. . .
  2. Die Zeitintervalle in der numerischen Methode.

Das Problem entsteht bei der Analyse zweier diskreter Zeitprozesse, zusammenhängend mit einem stetigen Prozess.

- Auch wenn das Basisobjekt einer Option stetiger Betrachtung untersteht, müssen oft zur Evaluierung des Preises numerische Methoden herangezogen werden, z.B. bei amerikanischen Optionen. Die Qualitätsverbesserung der numerischen Methoden involviert die Analyse, wie diskrete Prozesse einen stetigen approximieren.

Der negative Effekt von diskreter Preisfestsetzung auf Optionen wurde bereits ausführlich in der Literatur behandelt. Mehrfach wurde bereits darüber diskutiert und mit numerischen Methode illustriert, wie sich das Ignorieren der Unterschiede stetiger und diskreter Zeit, negativ auf die Ergebnisse einer Approximation auswirkt. In dieser Arbeit wollen wir einen allgemeinen Ansatz zur Verbindung stetiger und diskreter Preise entwickeln. Unter anderem präsentieren wir folgendes:

- Korrekturausdrücke, die die Approximation diskreter Zeitprozesse durch die Verwendung stetiger stark verbessern.
- Baum-Methoden die die oben-erwähnten Korrekturausdrücke zur Verbesserung der Konvergenz zum exakten, diskreten Preis verwenden.
- Baum-Methoden, welche ähnliche Korrekturausdrücke verwenden, zur Verbesserung der Konvergenz zum stetigen Preis.

Viele Korrekturausdrücke für Barrier-Optionen basieren auf der Konstante  $\beta_1 = \frac{-\zeta(1/2)}{\sqrt{2\pi}}$  wobei  $\zeta$  die Riemann-zeta-Funktion ist. Diese kann man interessanterweise, auf eine andere Art und Weise, auch bei Lookback-Optionen verwenden

# Kapitel 3

## Stetigkeitskorrekturen

Wir gehen ab jetzt davon aus, dass der stetige Preis durch die Annahmen von Black und Scholes bestimmt wird.

Es existiert ein risikobehafteter Vermögenswert  $\{S_t \geq 0\}$  welcher sich folgendermaßen entwickelt:

$$dS_t = \nu S_t dt + \sigma S_t dZ_t \quad (3.1)$$

wobei  $Z$  ein standard Wienerprozess und  $\nu$  und  $\sigma > 0$  Konstanten sind. Die Renditenkurve ist flach und  $r$  entspricht dem risikolosen Zinsen. Der Preis eines bedingten Anspruchs auf  $\{S_t, 0 \leq t \leq T\}$  ist der erwartete gegenwärtige Wert von dessen Auszahlung, wobei die Erwartung mit  $\nu = r^3$  berechnet wird. Da wir nur an den Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen unter dem risikoneutralen Maß interessiert sind setzen wir  $\nu = r$ .

Um die Auszahlungen einiger Pfad-abhängiger Optionen näher zu bestimmen benötigen wir zusätzliche Notationen. Mit  $\nu = r$  schreiben wir die Lösung zu (3.1) als

$$S_t = S_0 e^{((r-1/2\sigma^2)t + \sigma Z_t)} \equiv S_0 e_t^B \quad (3.2)$$

wobei  $B_t$  ein Wienerprozess mit Drift  $r - 1/2\sigma^2$  und Varianz  $\sigma^2$  ist.

Für die diskrete Option, sei  $m$  die Anzahl an Preisfestsetzungen und  $\Delta t = T/m$  das Zeitintervall zwischen den Festsetzungen. Man setze

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_H = \text{das erste } t \text{ bei dem } S_t \text{ das Level } H \text{ erreicht;} \\ \tilde{\tau} &= \tilde{\tau}_H = \text{das erste } k \text{ bei dem } S_{k\Delta t} \text{ das Level } H \text{ überschreitet;} \\ M &= \max_{0 \leq t \leq T} B_t \\ \tilde{M}_m &= \max_{0 \leq k \leq m} B_{kT/m} \end{aligned}$$

Um Zweideutigkeiten zu vermeiden definieren wir  $\tilde{\tau}$  genauer als  $\inf \{k \geq 0 : S_{k\Delta t} > H\}$  im Fall  $H > S_0$  und  $\inf \{k \geq 0 : S_{k\Delta t} < H\}$  im Fall  $H < S_0$ . Der Fall  $H = S_0$  wird ausgeschlossen.

So sieht die Auszahlung für einen knock-out Call mit Strike  $K$  und der Barriere  $H$  folgendermaßen aus:

$$(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\tau_H > T} \quad (3.3)$$

und die Auszahlung eines knock-in Calls

$$(S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\tau_H \leq T} \quad (3.4)$$

Die entsprechenden Put-Auszahlungen erhält man durch das Austauschen von  $S_T - K$  mit  $K - S_T$ . Die Auszahlungen für die Barrier-Option:

$$(S_{m\Delta t} - K)^+ \mathbf{1}_{\tilde{\tau}_H > m} \quad (3.5)$$

und

$$(S_{m\Delta t} - K)^+ \mathbf{1}_{\tilde{\tau}_H \leq m} \quad (3.6)$$

und die Auszahlungen des diskreten Lookback-Puts

$$S_0 e^M - S_T \text{ und } S_0 e^{\tilde{M}_m} - S_T \quad (3.7)$$

Für lookback-Calls ersetzt man das max in der Definition von  $M$  und  $\tilde{M}_m$  mit einem min und multipliziert mit  $-1$ .

Letztendlich die Auszahlungen für Hindsight-Calls:

$$(S_0 e^M - K)^+ \text{ und } (S_0 e^{\tilde{M}_m} - K)^+ \quad (3.8)$$

mit stetigen und diskreten Preisfestsetzungen.

Geschlossene Darstellungen für die diskreten Versionen der obigen Optionen involviert üblicherweise eine  $m$ -dimensionale multivariate Normalverteilung und ist daher für mehr als  $m = 5$  Preisfestsetzungen weniger sinnvoll. Die folgenden Ergebnisse jedoch zeigen, dass man mit den passenden Korrekturen und stetigen Formeln, die Preise für diskrete Optionen mit einer größeren Anzahl von Preisfestsetzungen  $m$ , ziemlich genau berechnen kann.

In dem folgendem Theorem sei  $\beta_1 = \frac{-\zeta(1/2)}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.5826$  wobei  $\zeta$  wieder die Riemann zeta funktion ist.

**Theorem 1** *Sei  $V(H)$  der Preis eines stetigen down-and-in Calls, down-and-out Calls, up-and-in Puts, oder up-and-out Puts. Sei  $V_m(H)$  der Preis einer ansonsten identischen diskreten Barrier-Option. Dann gilt  $V_m(H) = V(H e^{\pm\beta_1\sigma\sqrt{T/m}}) + o(1/\sqrt{m})$ , mit  $+$  für eine up Option und  $-$  für eine down Option.*

Man kann dieses Resultat so interpretieren, dass um den Preis einer Barrier-Option mit diskreter Preisfestsetzung, mithilfe von stetigen Formeln zu bestimmen, man die Barriere weg von  $S_0$  um den Faktor  $e^{\pm\beta_1\sigma\sqrt{T/m}}$  verschieben muss. Dies korrigiert den Fehler, der entsteht wenn der Prozess  $\{S_{k\Delta t}, k = 0, 1, 2, \dots\}$  die Barriere überschreitet. Die Konstante  $\beta_1\sigma\sqrt{T/m}$  sollte als eine Approximation der Überschreitung im Logarithmus des Basiswertes gesehen werden.

Im Fall ohne Drift  $r - \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$ , mit  $H > S_0$ , gilt

$$\sqrt{m}E[B_{\tilde{\tau}_{\Delta t}} - \log(H/S_0)] \rightarrow \beta_1\sigma\sqrt{T} \quad (3.9)$$

Also approximiert  $\beta_1\sigma\sqrt{T/m}$  den Ausdruck  $E[[B_{\tilde{\tau}_{\Delta t}}] - \log(H/S_0)]$ . Eine weitere Taylorentwicklung führt zur Approximation

$$\begin{aligned}
E[S_{\tilde{\tau}_{\Delta t}}] &= S_0 E[\exp(B_{\tilde{\tau}_{\Delta t}})] \approx S_0 E[1 + B_{\tilde{\tau}_{\Delta t}}] \\
&\approx S_0(1 + \log(H/S_0) + \beta_1 \sigma \sqrt{T/m}) \\
&\approx H e^{\beta_1 \sigma \sqrt{T/m}}
\end{aligned}$$

Diese Interpretation reflektiert das exakte Resultat

$$P(\tilde{\tau}_H \leq m) = P(\tau_{H \exp(\beta_1 \sigma \sqrt{\Delta t})} \leq T) + o(1/\sqrt{m}). \quad (3.10)$$

Wegen 3.7 und der Tatsache, dass  $E[S_T] = e^{rT} S_0$ , involviert die Preisbestimmung einer diskreten Lookback-Option zu Beginn des Vertrags, den Ausdruck  $E[e^{\tilde{M}_m}]$ . Es folgt ein heuristisches Argument für die Barrierenkorrektur zur Approximation von Lookbacks. Für ein  $x > S_0$  gilt

$$\{\tilde{\tau}_x \leq m\} = \{S_0 e^{\tilde{M}_m} > x\} \text{ und } \{\tau_x \leq T\} = \{S_0 e^M \geq x\} \quad (3.11)$$

Wir können daher für 3.10 auch

$$P(S_0 e^{\tilde{M}_m} > x) \approx P(S_0 e^M > x e^{\beta_1 \sigma \sqrt{T/m}}) \quad (3.12)$$

schreiben.

Durch Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}
E[S_0 e^{\tilde{M}_m}] &= \int_0^\infty P(S_0 e^{\tilde{M}_m} > x) dx \\
&\approx \int_0^\infty P(S_0 e^M > x e^{\beta_1 \sigma \sqrt{T/m}}) dx \\
&= e^{-\beta_1 \sigma \sqrt{T/m}} \int_0^\infty P(S_0 e^M > y) dy \\
&= e^{-\beta_1 \sigma \sqrt{T/m}} E[S_0 e^M],
\end{aligned}$$

was einen Korrekturmechanismus zur Verknüpfung diskreter und stetiger Lookbacks andeutet. Es scheint jedoch unmöglich aus dieser heuristischen Skizze ein valides Argument zu erstellen, da 3.10 nur für  $x > S_0$  gilt und dieser Ansatz die Integration bis zu  $x = S_0$  erfordert. Jedoch erhält man durch die Erweiterung der Resultate von Asmussen, Glynn und Pitmann eine Korrektur der zweiten Ordnung.

Es folgt aus Theorem 2 und Lemma 6 aus Asmussen, Glynn und Pitmann, dass

$$\beta_1 = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{m} E[M - \tilde{M}_m]}{\sigma \sqrt{T}} \quad (3.13)$$

und

$$\beta_2 \hat{=} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m[(m - \tilde{M}_m)^2]}{\sigma^2 T} \quad (3.14)$$

existieren. Mithilfe von numerischen Methoden lässt sich der Wert  $\beta_2 \approx 0.425$  approximieren.



**Theorem 2** Sei  $V$  der Preis eines stetigen Lookback-Puts oder Calls zu Beginn des Vertrags und sei  $V_m$  der, ansonsten gleiche, diskrete Preis. Man definiere

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sigma}{2\pi} e^{-\frac{\mu^2 T}{2\sigma^2}} \pm \left( \mu\sqrt{T}\Phi(\mu\sqrt{T}/\sigma) - \frac{\mu\sqrt{T}}{2} \right) \right] \quad (3.15)$$

wobei  $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2$  und  $\Phi$  die kumulierte Normalverteilung ist. Dann gilt

$$V_m = (V + S_0) \left( 1 - \frac{\beta_1\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{m}} + \frac{\gamma_+\sqrt{T} + \frac{1}{2}\beta_2\sigma^2 T}{m} \right) - S_0 + Cov[e^M, \tilde{M}_m - M] + o(1/m) \quad (3.16)$$

für Puts und

$$V_m = (V + S_0) \left( 1 + \frac{\beta_1\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{m}} + \frac{\gamma_-\sqrt{T} + \frac{1}{2}\beta_2\sigma^2 T}{m} \right) - S_0 - Cov[e^{-M'}, \tilde{M}_m - M'] + o(1/m) \quad (3.17)$$

für Calls, wobei  $M' = \max_{0 \leq t \leq T} (-B_t)$  und  $M'_m = \max_{0 \leq k \leq m} (-B_{kT/m})$ .

Entwickeln wir die Terme nur bis zur Ordnung  $1/\sqrt{m}$  erhalten wir

$$V_m = (V + S_0) \left( 1 - \frac{\beta_1\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{m}} \right) + o(1/\sqrt{m}) \quad (3.18)$$

für einen Lookback-Put. Wegen 3.7 und der Tatsache, dass  $e^{-rT}E[S_T] = S_0$  ist dies äquivalent zur Aussage

$$S_0 E[e^{\tilde{M}_m}] = S_0 E[e^M] \left( 1 - \frac{\beta_1\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{m}} \right) + o(1/\sqrt{m}) \quad (3.19)$$

und dies wiederum äquivalent zu

$$S_0 E[e^{\tilde{M}_m}] = S_0 E[e^M] e^{-\beta_1\sigma\sqrt{T/m}} + o(1/\sqrt{m}) \quad (3.20)$$

Daher ist Theorem 2 konsistent mit unserer heuristischen Approximation.

Asmussen, Glynn und Pitmann zeigen auch, dass  $\sqrt{m}(\tilde{M}_m - M)$  und  $M$  asymptotisch unabhängig sind. Es folgt durch Argument der uniformen Integrierbarkeit

$$\sqrt{m}Cov[e^M, \tilde{M}_m - M] \rightarrow 0. \quad (3.21)$$

Also existiert keine Kovarianz wenn wir unsere Ausdrücke bis zur Ordnung  $1/\sqrt{m}$  erweitern. Wir haben jedoch keine Konvergenz zu 0 wenn die Kovarianz mit  $m$  skaliert wird. Es scheint sogar, dass  $mCov[e^M, \tilde{M}_m - M]$  gegen eine Konstante konvergiert. Es ist unklar, wie diese Konstante vom Drift und dem Varianzparameter von  $B_t$  abhängt. Daher ist es schwer diesen Ausdruck in eine praktische Approximation einzubauen.

In numerischen Beispielen finden wir, dass dieser Ausdruck sehr klein ist und lassen ihn

daher aus und bezeichnen die in Theorem 2 beschriebenen Formeln, auch ohne des Kovarianzausdruckes, als ‘‘Approximationen 2ter Ordnung‘‘ wobei der Fehler genau gesehen nur dann  $o(1/m)$  ist wenn der Kovarianzausdruck dabei ist.

Theorem 2 gilt nur für Optionen zu Beginn des Vertrags. Zu einer beliebigen Zeit  $0 < t < T$  während der Laufzeit eines stetigen Lookback-Puts, ist sein Wert

$$V(S_+) = e^{-r(T-t)} E[\max\{S_+, \max_{t \leq u \leq T} S_u\}] - S_t, \quad (3.22)$$

wobei  $S_+ = \max_{0 \leq u \leq t} S_u$ . Der Preis eines stetigen Lookback-Calls ist ähnlich und hängt von  $S_- = \min_{0 \leq u \leq t} S_u$  und  $\min_{t \leq u \leq T} S_u$  ab. Der Preis eines diskreten Puts zu  $k$ ten Preisfestsetzung ist

$$V_m(S_+) = e^{-r(m-k)\Delta t} E[\max\{S_+, \max_{k \leq j \leq m} S_{j\Delta t}\}] - S_{k\Delta t}, \quad (3.23)$$

wobei  $S_+ = \max_{0 \leq j \leq k} S_{j\Delta t}$ . Der Wert eines diskreten Lookback-Puts zur  $k$ ten Preisfestsetzung entspricht einem ähnlichen Ausdruck und involviert  $S_- = \min_{0 \leq j \leq k} S_{j\Delta t}$  und  $\min_{k \leq j \leq m} S_{j\Delta t}$ . Wir bezeichnen  $S_-$  und  $S_+$  jeweils als die *festgelegten min und max*. Die Tatsache, dass diese anders berechnet werden für stetige und diskrete Optionen spielt keine Rolle. Wenn der Wert einer Option festgelegt wird ist das entsprechende  $S_{\pm}$  bekannt und wirkt als Parameter der Funktion der Auszahlung genauso wie der Strike in einer Standardoption.

Wir kommen nun zu

**Theorem 3** *Für den Preis einer diskreten Lookback-Option zur  $k$ ten Preisfestsetzung und den Preis einer stetigen Lookback-Option zur Zeit  $T = k\Delta t$  gilt*

$$V_m(S_{\pm}) = \pm \left[ e^{\mp \beta_1 \sigma \sqrt{T/m}} (S_{\pm} e^{\pm \beta_1 \sigma \sqrt{T/m}}) + (e^{\pm \beta_1 \sigma \sqrt{T/m}} - 1) S_t \right] + o(1/\sqrt{m}), \quad (3.24)$$

wobei, mit  $\pm$  und  $\mp$  der obere Fall für Puts und der untere für Calls gültig ist.

Im Falle eines Puts, zeigen Berechnungen das 3.24 äquivalent zu

$$E[\max\{\max_{k \leq j \leq m} S_{j\Delta t}, S_+\}] = e^{-\beta_1 \sigma \sqrt{(T-m)/m}} E[\max\{\max_{t \leq u \leq T} S_t, e^{\beta_1 \sigma \sqrt{T/m}} S_+\}] + o(1/\sqrt{m}). \quad (3.25)$$

Theorem 3 kann daher auch folgendermaßen interpretiert werden: Um den Preis eines diskreten Lookback-Puts mithilfe von stetigen Formeln zu bestimmen, muss man zuerst das festgelegte max um den Faktor  $e^{\beta_1 \sigma \sqrt{T/m}}$  erhöhen, und dann das erwartete Maximum über  $[0, T]$  um den denselben Faktor verkleinern. Für einen Lookback-Call, verkleinert man zuerst das festgelegte min und erhöht dann das erwartete Minimum.

Zu guter Letzt betrachten wir die Preisbestimmung einer Hindsight-Option im Detail. Der Preis eines stetigen Hindsight-Calls zum Zeitpunkt  $t$  mit festgelegtem max  $S_+$  und Strike  $K$  ist

$$V(S_+, K) = e^{-r(T-t)} E[(\max\{S_+, \max_{t \leq u \leq T} S_u\} - K)^+]; \quad (3.26)$$

ähnlich ist

$$V(S_-, K) = e^{-r(T-t)} E[(K - \min\{S_-, \min_{-t \leq u \leq T} S_u\})^+] \quad (3.27)$$

der Preis eines stetigen Hindsight-Puts. Die diskreten Gegenstücke zur  $k$ ten Preisfestsetzung sind

$$V_m(S_+, K) = e^{-r(m-k)\Delta t} E[(\max\{S_+, \max_{k \leq j \leq m} S_{j\Delta t}\} - K)^+] \quad (3.28)$$

und

$$V_m(S_-, K) = e^{-r(m-k)\Delta t} E[(K - \min\{S_-, \min_{k \leq j \leq m} S_{j\Delta t}\})^+]. \quad (3.29)$$

Conze und Viswanathan bieten explizite Formeln für stetige Preise. Mit dem nächsten Resultat wollten wir zeigen wie man diese Formeln auch zur Preisbestimmung der diskreten Version bearbeiten kann:

**Theorem 4** *Für Hindsight-Optionen gilt*

$$V_m(S_{\pm}, K) = V(S_{\pm} e^{\pm\beta_1\sigma\sqrt{T/m}}, K e^{\pm\beta_1\sigma\sqrt{T/m}}) e^{\mp\beta_1\sigma\sqrt{T/m}} + o(1/\sqrt{m}) \quad (3.30)$$

wobei bei  $\pm$  und  $\mp$  der obere Fall für Calls und der untere für Puts gilt. Vielmehr, existiert eine simple Verknüpfung zwischen Hindsight Calls(Puts) und Lookback-Puts(Calls) zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t \in [0, T]$ . Indem wir die Identität  $(x - y)^+ = \max\{x, y\} - y$  setzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} V^C(S_+, K) &= e^{-r(T-t)} E[(\max\{S_+, \max_{t \leq u \leq T} S_u\} - K)^+] \\ &= e^{-r(T-t)} E[(\max\{S_+, \max_{t \leq u \leq T} S_u, K\} - K)] \\ &= e^{-r(T-t)} E[(\max\{S_+, \max_{t \leq u \leq T} S_u, K\} - S_T + S_T - K)] \\ &= e^{-r(T-t)} E[(\max\{S_+, \max_{t \leq u \leq T} S_u, K\} - S_T) + S_t - e^{-r(T-t)} K] \\ &= V^P(\max\{S_+, k\}) + S_t - e^{-r(T-t)} K, \end{aligned}$$

wobei  $V^C(S_+, K)$  der Preis eines stetigen hindisght Calls mit festgelegtem  $\max S_+$  und Strike  $K$ , und  $V^P(\max\{S_+, K\})$  der Preis eines stetigen Lookback-Puts mit festgelegtem  $\max \max\{S_+, K\}$  ist. Ähnliches gilt für die stetigen Versionen

$$V_m^C(S_+, K) = V_m^C(\max\{S_+, K\}) + S_{k\Delta t} - e^{-r(m-k)\Delta t} K, \quad (3.31)$$

mit  $k = 1, \dots, m$ . Diese Resultate sind nützlich, da sie einige Formeln vereinfachen. Gleichung wird auch oft benützt, da sie zeigt, dass numerische Methoden zur Berechnung von Lookbacks und auch zur Berechnung von Hindsight-Optionen verwendet werden können.

In dem nächsten Abschnitt geben wir zahlreiche numerische Beispiele, welche die Genauigkeit der korrigierten Preisbestimmungsformeln von Theorem 2-4 zeigen. Bevor wir jedoch numerisch die Preise dieser diskreten Optionen bestimmen, müssen wir speziell angepasste numerische Prozesse für diese Approximationen entwickeln. Zahlreiche dieser Prozesse benutzen Korrekturen, analog zu denen in unseren Approximationsformeln.

# Kapitel 4

## Baum-Methoden für diskrete Optionen

In diesem Abschnitt wollen wir numerischen Prozesse entwickeln, welche die Preise, der in Abschnitt 2 behandelten Optionen, mit hoher Genauigkeit und geringem Aufwand, bestimmen können. Die Ausdrücke „hohe Genauigkeit“ und „geringer Aufwand“ werden in Kürze genauer beschrieben. Spezielle numerische Methoden sind notwendig, um die Effektivität unserer Approximationsmethoden und auch die Preise von amerikanischen Optionen bestimmen zu können. Wir beginnen mit diskreten Barrier-Optionen, kommen dann zu den diskreten Lookback-Optionen und betrachten letztendlich diskrete numerische Methoden zur Preisbestimmung stetiger Lookback-Optionen.

In vielen Fällen benutzen die Prozesse Verschiebungstechniken analog zu denen in Theorem 1-4. Um zu sehen was für Korrekturen wir erwarten können, erinnern wir uns an  $\beta_1$  als das erwartete Überschreiten einer Grenze für Random-Walks. Baum-Methoden approximieren brown'sche Bewegung mit Random-Walks und Inkrementen der Form  $\pm a$  (im binomialen Fall) oder  $\pm a$  und  $0$  (im trinomialen Fall). Die „durchschnittliche Überschreitung“ einer Grenze für einen random walk dieser Art ist  $a/2$ . Also sollten wir bei korrekten Baum-Methoden eher einen Faktor  $1/2$  als  $\beta_1$  sehen. Des weiteren ist zu erwähnen, dass während vorher unsere Schrittweiten  $T/m$  waren, wobei  $m$  die Anzahl der Preisfestsetzungen war, von nun an unsere Schrittweite  $T/n$  beträgt, wobei  $n$  die Anzahl an Verzweigungen in unserem Baum ist.

### 4.1 Baum-Methoden für diskrete Barrier-Optionen

Um die Preise diskreter Barrier-Optionen genau bestimmen zu können entwickeln wir eine trinomiale Baum-Methode mit zahlreichen Modifikationen um die Konvergenz zu beschleunigen. Bevor wir unsere Methoden beschreiben, zeigen wir, dass die Verwendung vieler alternativer Prozeduren inadäquat zur Bestimmung der Preise mit hoher Genauigkeit ist.

Angenommen wir wollen den Preis einer diskreten down-and-out Barrier-Option mit den Parametern  $S_0 = K = 100$ ,  $\sigma = 0.6$ ,  $r = 0.1$ ,  $T = 0.2$ ,  $H = 95$ , und  $m = 50$ , berechnen und wir wollen zu einer Genauigkeit um die \$0.001 kommen. Dies ist ein recht schwieriger Test, aufgrund der hohen Volatilität und der Nähe von  $H$  zu  $S_0$ . Ein sehr bekannter

Prozess, der sich mit solchen Approximationen befasst ist die Monte Carlo Simulation. 100,000 Zufallsexperimente geben ein 95% Konfidenzintervall von [6.342, 6.404], mit einer Weite von 6 Cent. Um eine Weite von 0.1 Cent durch eine Simulation zu erreichen würde man ungefähr 4.2 Milliarden Experimente benötigen, wofür man mit einem Intel Pentium 133 MHz Prozessor 10 Tage brauchen würde. Die Situation kann leicht verbessert werden, indem man den europäische Optionswert als Kontrollvariable nimmt. Hier bringen 100,000 Experimente ein 95% Konfidenzintervall von [6.342, 6.384], mit einer Weite von 4 Cent. Dennoch würde man, um ein Weite von 0.001 Cent zu erreichen 1.8 Milliarden Experimente benötigen.

Als nächstes betrachten wir, die in Boyle dargestellte und in Kamrad und Ritchken erweiterte, standard Trinomialmethode und besprechen dann unsere Modifikationen zur genaueren Preisbestimmung diskreter Barrier-Optionen. Die Trinomialmethode approximiert den lognormalverteilten Prozess  $S$  durch einen Baum, welcher 3 weiterführende Zustände bei jeder Verzweigung besitzt. Beginnend beim Zustand  $S$  zur Zeit  $t$ , gelangt der Prozess zum Zustand  $uS$ ,  $S$ , oder  $dS$  zur Zeit  $t + h$ , jeweils mit den Wahrscheinlichkeiten  $p_u$ ,  $p$ , und  $p_d$ . Hier stellt  $h = T/n$  einen arbiträren Zeitschrittparameter dar. Die Multiplikatoren  $u$  und  $d$  sind gegeben durch

$$u = e^{\lambda\sigma\sqrt{h}} \text{ und } d = e^{-\lambda\sigma\sqrt{h}} = 1/u, \quad (4.1)$$

wobei  $\lambda$  ein „Streckparameter“ ist, welcher in Kürze näher beschrieben wird. Die Wahrscheinlichkeiten sind gesetzt mit

$$p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{h}}{2\lambda\sigma}, \quad p = 1 - \frac{1}{\lambda^2}, \quad \text{und } p_d = 1 - p_u - p, \quad (4.2)$$

wobei  $\mu \equiv r - \sigma^2/2$ . Mit diesen Parametern, entsprechen Erwartungswert und Varianz des trinomialen Prozesses, den ersten 2 Momenten des lognormalverteilten Preisprozesses. Mit den Werten  $\lambda = 1$ ,  $p = 0$  entspricht die Trinomialmethode der Binomialmethode von Cox, Ross und Rubinstein. Für  $\lambda^* \hat{=} \sqrt{3/2} \approx 1.225$ ,  $p = 1/3$  konvergieren die Wahrscheinlichkeiten  $p_u$  und  $p_d$  nach  $1/3$  mit  $h \rightarrow 0$ . Boyle empfiehlt diese Wahl für  $\lambda$  und Omberg bietet zusätzliche Argumente für diese Wahl. Die Trinomialmethode benötigt für die gleiche Anzahl an Zeitschritten ungefähr 50% mehr Rechenzeit als die Binomialmethode. Broadie und Detemple zeigen für standard amerikanische Optionen ohne Barrieren, dass die erhöhte Genauigkeit der Trinomialmethode (verglichen mit der Binomialmethode), ihre Schwächen nicht gänzlich kompensiert. Dies zeigt, dass das Hinzufügen eines zusätzliche Astes an sich, nicht unbedingt zu einer erheblichen Verbesserung führt. Wir werden jedoch sehen, dass der Vorteil der Trinomialmethode in der zusätzlichen Freiheit bei der Gestaltung des Baumes liegt.

Zum Beispiel ist bei Barrier-Optionen die Flexibilität, die durch die freie Auswahl des Streckparameters  $\lambda$  geboten wird, ein großer Vorteil. Bei der Binomialmethode fanden Boyle und Lau heraus, dass die Platzierung der Verzweigungen in Relation zu der Barriere eine entscheidende Wirkung auf die Konvergenzgeschwindigkeit zur Preisbestimmung des Preises von Barrier-Optionen hat. Liegt eine Ebene von Verzweigungen nur leicht über der Barriere, liegen die Optionspreise signifikant näher an ihrem wahren Wert. Bei der

Binomialmethode gelingt die korrekte Positionierung der Verzweigungen und der Barriere nur bei bestimmten Werten von  $n$ , welche im Vorhinein berechnet werden können. Falls wir bei diskreten Barrier-Optionen verlangen, dass die Anzahl an Zeitschritten  $n$  teilbar durch die Anzahl an diskreten Barrierepunkten  $m$  ist, sind die entsprechend "guten" Werte für  $n$  sehr hoch. Ritchken schlägt daher, die Benutzung der Trinomialmethode vor, da durch das Verändern des Parameters  $\lambda$  die Barriere und die Verzweigungen zusammenfallen, unabhängig von der Zahl  $n$ .

Um den Preis einer diskreten Barrier-Option mithilfe der Trinomialmethode zu bestimmen, muss man zuerst  $n$ , als die nächste ganze Zahl, die durch die Anzahl der Preisfestsetzungen  $m$  teilbar ist, setzen. Für die Auswahl von  $\lambda$  empfiehlt Ritchken vorläufig, es gleich 1 zu setzen, dann zu bestimmen wo die Barriere relativ zu den Verzweigungen liegt und es dann schrittweise zu erhöhen, bis eine Ebene von Verzweigungen mit der Barriere zusammenfällt. Das ist die grundlegende Trinomialmethode zur Preisbestimmung diskreter Barrier-Optionen. Obwohl diese Methode recht gut zur Approximation der Preise stetiger Optionen funktioniert, kommt es, wie wir zeigen werden, bei ihrer Anwendung für diskrete Optionen zu Problemen.

Zu dieser grundlegenden Methode schlagen wir zahlreiche Verbesserungen vor. Zuerst sollte man die diskrete Barriere  $H$  durch die verschobene Barriere  $H' = He^{\pm 0.5\lambda^*\sigma\sqrt{h}}$  (wobei  $+$  für eine up und  $-$  für eine down Optionen zu verwenden ist) ersetzen. Der Faktor  $1/2$ , ist wie zuvor erwähnt das Analogon zu  $\beta_1$  für einen trinomialen Random-Walk. Diese Verschiebung ist ebenfalls analog zur Stetigkeitskorrektur, die wir für die Normalverteilung, approximiert als eine Binomialverteilung, verwendet haben. Als nächstes muss die Anzahl an Zeitschritten  $n$  und  $\lambda$ , wie oben beschrieben, bestimmt werden. Darauf folgend beginnen wir mit der Optionspreiskalkulation beim  $(m - 1)$ ten Barrierepunkt. Zu dieser Zeit entspricht die Barrier-Option einer gewöhnlichen european Option, deren Preis man durch die Black-Scholes Formel oder eine leichte Variation derer, bestimmen kann. Um  $n$  und  $\lambda$  zu bestimmen, setzen wir vorläufig  $\lambda = \lambda^*$  und definieren  $\lambda_1$  als der kleinste Wert der größer als  $\lambda^*$  ist, bei dem eine Ebene von Verzweigungen mit der verschobenen Barriere zusammenfällt und  $\lambda_2$  als der größte Wert, kleiner als  $\lambda$ , so dass eine Ebene von Verzweigungen mit die Barriere zusammenfällt.

Man betrachte nun Anzahl an Zeitschritten  $n = km$ , mit  $k = 0, 1, \dots, k'$  wobei  $k'$  dem ersten mal entspricht, bei dem eine Ebene von Verzweigungen die Barriere überschreitet (d.h. die erste Verkleinerung von  $\lambda_1$ ). Von dieser Menge wählt man die Anzahl an Zeitschritten, welche  $|\lambda_i(k) - \lambda^*|$  für  $i = 1, 2$  und  $k = 0, \dots, k'$  minimiert. Kurz gesagt produziert diese Prozedur ein  $n$ , welches durch  $m$  teilbar ist und einen Streckparameter  $\lambda$  welcher nah zu  $\lambda^*$  ist und eine Ebene von Verzweigungen mit der verschobenen Barriere zusammenfällt. Wir bezeichnen die Kombination dieser Techniken als die *verbesserte Trinomialmethode*.

Um diese Methoden besser einschätzen zu können, vergleichen wir sie in besonderen Fällen, nämlich wenn der Preis der diskreten Barrier-Option genau berechnet werden kann. Tabelle 1 zeigt was die grundlegende und die verbesserte Methode leisten, wenn man den Preis eines down-and-out Calls berechnen will. Die grundlegende Methode hat einen recht großen Fehler von 13.7 Cent mit  $n = 248$  Schritten und einen immer noch

**Tabelle 1** Die Parameter für den diskreten down-and-out Call sind:  $S = K = 100$ ,  $H = 95$ ,  $T = 0.2$ ,  $\sigma = 0.6$ ,  $r = 0.1$  und  $m = 4$ . Die grundlegende Methode benutzt Extrapolation mit Grad  $1/2$ . Die verbesserte Methode benutzt lineare Extrapolation.

| verbesserte Trinomialm. |           |         |               | grundlegende Trinomialm. |           |         |               |
|-------------------------|-----------|---------|---------------|--------------------------|-----------|---------|---------------|
| $n$                     | $\lambda$ | Preis   | 2-pkt Extrap. | $n$                      | $\lambda$ | Preis   | 2-pkt Extrap. |
| 256                     | 1.22365   | 9.49690 |               | 248                      | 1.00346   | 9.35373 |               |
| 504                     | 1.22598   | 9.49349 | 9.4899        | 500                      | 1.06861   | 9.33210 | 9.27990       |
| 1240                    | 1.22397   | 9.49189 | 9.4907        | 1000                     | 1.00750   | 9.38524 | 9.51352       |
| 2308                    | 1.22450   | 9.49124 | 9.4905        | 2000                     | 1.06861   | 9.44166 | 9.47541       |
| 4524                    | 1.22454   | 9.49090 | 9.4905        | 4000                     | 1.00750   | 9.43805 | 9.50177       |
| 8632                    | 1.22485   | 9.49072 | 9.4905        | 8000                     | 1.00575   | 9.45352 | 9.49086       |

inakzeptablen Fehler von 3.7 Cent mit  $n = 8000$  Schritten. Die verbesserte Methode erreicht bereits mit 256 Schritten eine Genauigkeit von einem Penny. Da die Monotonie der Preise mit der Anzahl der Schritte steigt, empfiehlt es sich die Richardson Extrapolation zur weiteren Verbesserung der Konvergenz zu benutzen. Die verbesserte Trinomialmethode scheint lineare Konvergenz zu haben, also ist die relevante Formel für die 2-Punkt Richardson Extrapolation  $P = aP_k + bP_n$ , wobei  $P_n$  der Preis mit  $n$  Schritten und  $P_k$  der Preis mit  $k > n$  Schritten,  $a = k/(k - n)$  und  $b = 1 - a$  ist. Wenn  $k = 2n$  ist die Formeln einfach

$$P = 2P_{2n} - P_n. \quad (4.3)$$

Die grundlegende Trinomialmethode scheint eine langsamere Konvergenz der Ordnung  $p = 1/2$  zu haben. In diesem Fall ist die relevante 2-Punkt Richardson Extrapolationsformel  $P = aP_k + bP_n$ , mit  $k > n$ ,  $a = \sqrt{k}/(\sqrt{k} - \sqrt{n})$  und  $b = 1 - a$ . Für  $k = 2n$  ist die Formel

$$P = 3.414P_{2n} - 2.414P_n. \quad (4.4)$$

Um einen bedeutenderen Vergleich der beiden Methoden zu finden wollten wir den Preis von 500 zufälligen Optionen bestimmen. Die Verteilung der Parameter für den Test ist:  $S = 100$ ,  $\sigma$  ist uniform auf  $[0.1, 0.6]$ ,  $r$  ist uniform auf  $[0, 0.1]$ ,  $T$  ist uniform auf  $[0.1, 1.0]$ ,  $H$  ist uniform auf  $[70, 95]$ ,  $K$  ist uniform auf  $[1.1H, 130]$  (von  $H$  abhängig) und  $m = 3$ . Die Methoden werden nach dem mittleren quadratischen Fehler aller Optionen im Test verglichen. Der Preis lag bei mindestens \$0.50. Die Resultate werden in Abb. 1 gezeigt. Der Fehler der verbesserten Trinomialmethode ist um mehr als eine Ordnung kleiner als der, der grundlegenden Methode. Wenn beide Methoden durch die 2-Punkt Richardson Extrapolation verbessert werden kommt es sogar zu einem Vorsprung der verbesserten Methode um 2 Ordnungen. Die Rate der linearen Konvergenz wird ebenfalls in Abb. 1 gezeigt.

Als nächstes wollen wir die verbesserte Methode mit und ohne Extrapolation und die Approximation in Theorem 1 zur Preisbestimmung diskreter Barrier-Optionen mit verschiedenen Preisfestsetzungen vergleichen. Das Resultat für 500 Optionen mit derselben Parameterverteilung wird in Abb. 2 gezeigt.

Für tägliche und wöchentliche Preisfestsetzungen der Barrier-Optionen sind die wahren Preise nicht bekannt. Also benutzen wir den Preis der durch die verbesserte Trinomialme-

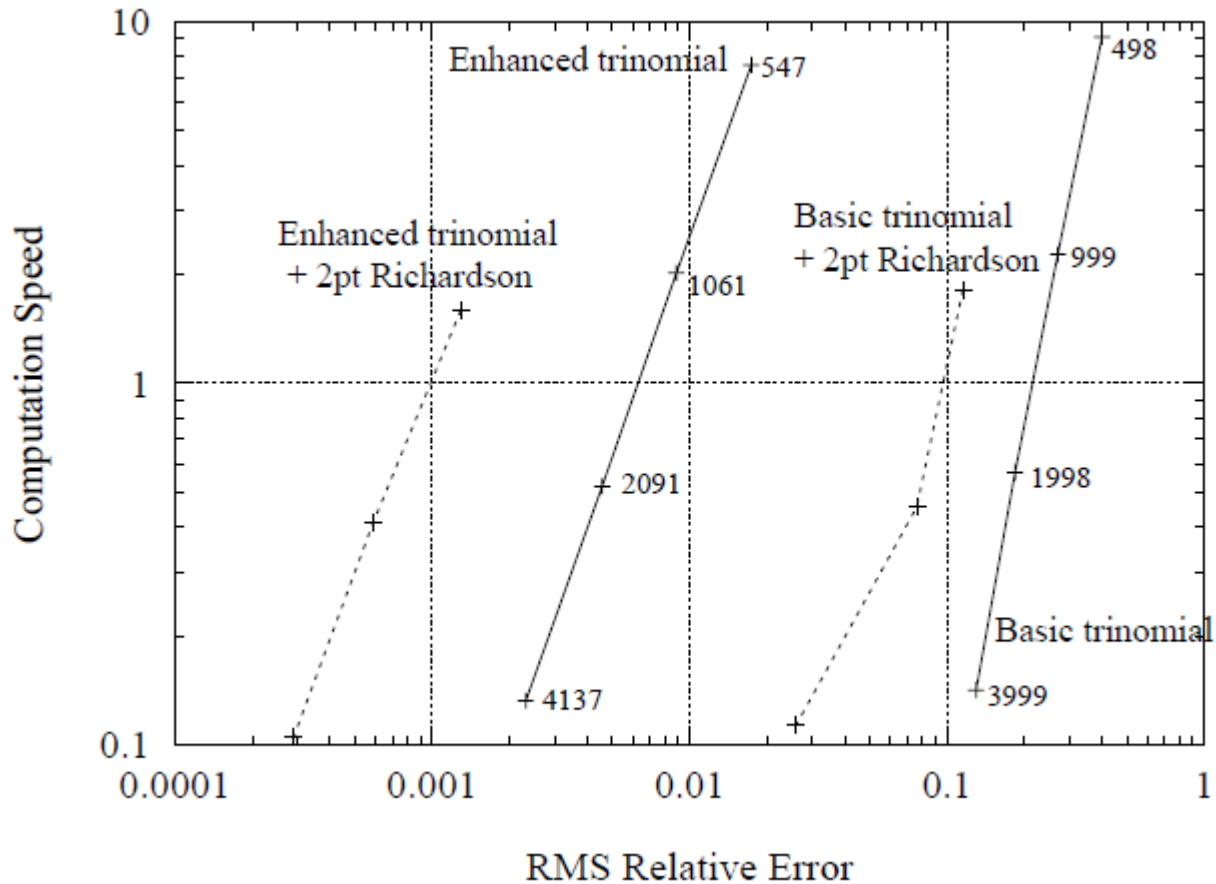


Abbildung 4.1: Hier wird die Preisbestimmung, diskreter down-and-out Calls mit  $m = 3$  Barrieren, der Trinomialmethoden verglichen. Die Berechnungsgeschwindigkeit wird in berechneten Optionepreisen pro Sekunde auf einem 133 Mhz Pentium Prozessor gemessen. Der RMS-Fehler (mittlerer quadratischer Fehler) wird in Prozent angegeben. Die bevorzugten Methoden sind im oberen linken Eck. Die Zahl neben den Methoden zeigt die durchschnittliche Zahl an Zeitschritten über einer Stichprobe von 500 Optionen. Zur standard Methode wird die Extrapolation zum Grad  $1/2$ , zur verbesserten die lineare, benutzt.

thode mit 10,000 und 20,000 Schritten und mithilfe der 2-Punkt Extrapolation generiert wird. Die verbesserte Methode funktioniert besser mit seltenerer Betrachtung der Barriere. Des weiteren verringert sich der Fehler mit der Erhöhung der trinomialen Schritte zwischen den Betrachtungspunkten. Im Gegensatz dazu verringert sich der Fehler in Theorem 1 schnell, mit steigender Anzahl an Preisfestsetzungen. Erhöht man die Anzahl von wöchentlich auf täglich bringt das eine Erhöhung um den Faktor 4.8 mit sich, während sich der Fehler der Approximation in Theorem 1 um den Faktor 23 verringert. Der Fehler von 0.007% bei täglicher Preisfestsetzung ist ungefähr äquivalent zur Genauigkeit der verbesserten Trinomialmethode mit 11,000 Schritten. Obwohl dies in Abb. 1 nicht gezeigt wird, verbessert sich die Genauigkeit der Approximation sehr schnell, wenn die Barriere  $H$  sich weg von  $S$  bewegt, sogar für eine geringe Anzahl an Preisfestsetzungen.



**Tabelle 2** Hier wird die Konvergenz der Trinomialmethode bei der Preisbestimmung eines diskreten Lookback-Puts gezeigt. Die Parameter sind:  $S_0 = 100$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $T = 0.2$ , wobei die Anzahl der Preisfestsetzungen variiert. Der Preis mit  $m = 4$  ist 6.574365. Die Trinomialmethode benutzt  $\lambda^* = 1.22474$ . In der Spalte 2-pkt Extr. Spalte wird lineare Extrapolation verwendet.

| $m = 4$ |         |               | $m = 50$ |         |               |
|---------|---------|---------------|----------|---------|---------------|
| $n$     | Preis   | 2-pkt Extrap. | $n$      | Preis   | 2-pkt Extrap. |
| 200     | 6.56845 |               | 200      | 8.91972 |               |
| 400     | 6.57140 | 6.57435       | 400      | 8.93387 | 8.94801       |
| 800     | 6.57288 | 6.57436       | 800      | 8.94104 | 8.94821       |
| 1600    | 6.57362 | 6.57436       | 1600     | 8.94471 | 8.94838       |
| 3200    | 6.57399 | 6.57437       | 3200     | 8.95675 | 8.94842       |
| 6400    | 6.57418 | 6.57437       | 6400     | 8.94750 | 8.94843       |

## 4.2 Baum-Methoden für diskrete Lookback-Optionen

Baum-Methoden für diskrete Lookback-Optionen wurden bereits in zahlreichen Arbeiten betrachtet, jedoch wurden dort weder Konvergenzraten noch Modifikationsmöglichkeiten, die zur Eingliederung der feststehenden min und max notwendig sind, in Betracht gezogen.

Das Hauptproblem bei der rechnerischen Bestimmung der Preise von diskreten Lookback-Optionen, verglichen mit standard Optionen, ist die Pfad-unabhängigkeit. Es gibt bereits einen Algorithmus von Hull und White für Pfad-unabhängigkeit, der sowohl den aktuellen Preis des Basisobjekts betrachtet, als auch das bisherige min oder max. Dies führt zu einer äußerst flexiblen Methode, jedoch kommt es aufgrund der „Extradimension“ zu einer erhöhten Rechenzeit. Babbs, Cheuk und Vorst stellen eine interessante Transformation vor, welche die hinzugefügte Dimension eliminiert. Sie konstruieren einen Binomialbaum für die Zustandsvariable, die sie als Verhältnis des bisherigen Minimums(Maximums) zum aktuellen Preis definieren. Wir folgen dieser Transformation, benutzen jedoch einen Trinomialbaum, dessen zusätzliche Flexibilität von großer Bedeutung nach Beginn des Vertrags, wenn das min oder max sich vom aktuellen Preis unterscheidet, ist.

Die Trinomialmethode für Lookback-Calls bildet einen Baum für die Zustandsvariable  $R = S_+/S$ . Vom Zustand  $R$  zur Zeit  $t$  bewegt sich der Prozess zu einem der Zustände  $Ru$ ,  $R$  und  $Rd$  zum Zeitpunkt  $t + h$ . (Ausnahmen bilden die Zeitpunkte der Preisfestsetzung und die grenze  $R = 1$  für stetige Lookbacks). Der Preis wird mit Hilfe von Pseudowahrscheinlichkeiten  $p'_u = p_u u$ ,  $p' = p$  und  $p'_d = p_d$  berechnet.

Die Konvergenz der Trinomialmethode zur Preisbestimmung diskreter Lookbacks wird in Tabelle 2 gezeigt.

Für eine kleine Nummer an Preisfestsetzungen kann der Preis der Option mittels der Formel in Heynen bestimmt werden und numerisch durch den Algorithmus von Shervish und Sigmund berechnet werden. Die Konvergenz der Trinomialmethode scheint linear in der Anzahl der Zeitschritte zu sein. Erneut verbessert die 2-Punkt Richardson Extrapolation

**Tabelle 3** Hier sind die Ergebnisse einer Approximation  $1^{ter}$  und  $2^{ter}$ -Ordnung eines diskreten Lookback-Puts. Die Parameter sind:  $S_0 = 100$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $T = 0.5$ , wobei die Anzahl der Preisfestsetzungen  $m$  variiert. Der Preis der stetigen Option ist 15.32526.

| $m$ | wahr     | $1^{ter}$ -Ordnung | $2^{ter}$ -Ordnung | Fehler1  | Fehler2 |
|-----|----------|--------------------|--------------------|----------|---------|
| 5   | 10.06425 | 9.15000            | 10.18203           | -0.91424 | 0.11779 |
| 10  | 11.39775 | 10.93133           | 11.44688           | -0.46642 | 0.04913 |
| 20  | 12.44463 | 12.20843           | 12.46604           | -0.23620 | 0.02141 |
| 40  | 13.23942 | 13.122034          | 13.24909           | -0.11908 | 0.00967 |
| 80  | 13.82950 | 13.76963           | 13.83398           | -0.05986 | 0.00449 |
| 160 | 14.26104 | 14.23100           | 14.26317           | -0.03004 | 0.00213 |

die Konvergenz.

Als nächstes betrachten wir den Fehler der Approximation  $1^{ter}$  Ordnung

$$V_m \approx (V + S_0)e^{-\beta_1\sigma\sqrt{T/m}} - S_0 \quad (4.5)$$

und die Approximation  $2^{ter}$  Ordnung aus Theorem 2(ohne den Kovarianzausdruck). Tabelle 3 zeigt die Resultate für einen diskreten Lookback-Put mit einer steigenden Anzahl an Preisfestsetzungen. Man bemerke, dass für monatliche, wöchentliche und tägliche Preisfestsetzungen jeweils  $m = 6$ ,  $m = 26$  und  $m = 125$  gilt. In Tabelle 3 wird der „wahre“ Wert mittels der Trinomialmethode mit 200 und 400 Zeitschritten zwischen den Preisfestsetzungen und der 2-Punkt Extrapolation berechnet. Zum Beispiel wird  $m = 160$  der wahre Preis durch die Extrapolation der Werte des Baumes mit 32000 und 64000 Schritten. Die Approximation  $1^{ter}$  Ordnung zeigt ungefähr lineare Konvergenz: Die Verdoppelung der Preisfestsetzungen verringert den Fehler um die Hälfte. Die Approximation  $2^{ter}$  Ordnung ist um einiges genauer und besitzt eine schneller Konvergenzrate. Sie erreicht eine „Cent-Genauigkeit“ mit nur  $m = 40$  Preisfestsetzungen.

Um einen systematischeren Test für die Konvergenz der Trinomialmethode und den Fehler der Approximation  $1^{ter}$  und  $2^{ter}$  Ordnung zu bekommen, bestimmten wir den Preis von 500 Optionen. Die Verteilung der Parameter für den Test ist:  $S = 100$ ,  $\sigma$  ist uniform auf  $[0.1, 0.6]$ ,  $r$  ist uniform auf  $[0, 0.1]$  und  $T$  ist uniform auf  $[0.1, 1]$ . Die Parameter werden unabhängig voneinander gewählt. Der Fehler wird mit dem quadratischen Mittel über alle Optionen im Test mit einem Mindestpreis von \$0.50, gemessen. Die Resultate werden in Abb. 3 gezeigt. Für  $m = 3$  wird der wahre Preis analytisch berechnet. Für wöchentliche und monatliche Preisfestsetzungen wird der wahre Preis durch die Trinomialmethode mit 10000 und 20000 Schritten und der 2-Punkt Extrapolation berechnet. Der Fehler der Trinomialmethode scheint linear, mit der Anzahl der Schritte, kleiner zu werden. Ihr Fehler steigt mit der Anzahl der Preisfestsetzungen, was impliziert, dass die Anzahl der Schritte zwischen den Preisfestsetzungen eine wichtige Variable ist. Die 2-Punkt Extrapolation scheint die Ordnung der Konvergenz um eins zu verbessern. Für tägliche Preisfestsetzungen hat die Approximation  $2^{ter}$  Ordnung einen Fehler, der mit dem eines Baumes mit 2000 Schritten(ohne Extrapolation), verglichen werden kann, wird jedoch um vier Ordnungsgrößen schneller berechnet.

**Tabelle 4** Ergebnisse der Approximation aus Theorem 3 zur Preisbestimmung eines diskreten Lookback-Puts mit max. Die Parameter sind:  $S = 100$ ,  $r = 0.1$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $T = 0.5$ , wobei  $m$  und das max  $S_+$  variieren. Der stetige Preis der Option auf der linken Seite ist 16.84677. Der auf der rechten 21.06454

| $S_+ = 110$ |          |          |          | $S_+ = 120$ |          |          |        |
|-------------|----------|----------|----------|-------------|----------|----------|--------|
| $m$         | wahr     | Approx.  | Fehler   | $m$         | wahr     | Approx.  | Fehler |
| 5           | 13.29955 | 12.7091  | -0.50864 | 5           | 18.83723 | -0.38724 |        |
| 10          | 14.12285 | 13.85570 | -0.26715 | 10          | 19.32291 | -0.20669 |        |
| 20          | 14.80601 | 14.66876 | -0.13725 | 20          | 19.74330 | -0.10821 |        |
| 40          | 15.34459 | 15.27470 | -0.06990 | 40          | 20.08297 | -0.05579 |        |
| 80          | 15.75425 | 15.71899 | -0.03553 | 80          | 20.34598 | -0.02851 |        |
| 160         | 16.05908 | 16.04117 | -0.01791 | 160         | 20.54289 | -0.01447 |        |

Nach Beginn des Lookback-Vertrags, hängt die Option sowohl vom aktuellen Wert des Basisobjekts und des derzeitigen mins oder max ab. In der trinomialen Lookback-Methode, bei der die Zustandsvariable dem Verhältnis des aktuellen max(oder min) zum aktuellen Preis des Basisobjekts gleich ist, entsprechen die Ebenen der Verzweigungen dem Verhältnis  $S_+/S = e^{j\lambda\sigma\sqrt{h}}$  für  $j = 0, 1, \dots$ . Damit diese Gleichung exakt für unsere  $s$  und  $S_+$  gilt, müssen wir zuerst  $S_+/S = e^{j\lambda^*\sigma\sqrt{h}}$  für  $j$  (dies entspricht dem Finden der Verzweigungsebene zwischen der das Verhältnis liegt indem wir den Streckparameter  $\lambda^*$  benutzen), runden  $j$  daraufhin auf die nächste ganze Zahl und adjustieren letztendlich  $\lambda$ , so, dass die Gleichung exakt gilt. Kurz gesagt, finden wir das  $\lambda$ , welches am nächsten zu  $\lambda^*$  liegt, sodass das aktuelle Verhältnis genau auf eine Verzweigungsebene des Baumes fällt. Für eine geringe Anzahl an Preisfestsetzungen haben wir die analytischen Werte der Optionen mittels der Formeln von Heynen, mit den, durch die Trinomialmethode entstandenen Werte verglichen. Diese konvergieren wie erwartet und die Resultate werden in Tabelle 2 gezeigt.

Um die Effektivität der Approximationen aus Theorem 3 einzuschätzen, bestimmten wir den Preis diskreter Lookback-Puts mit verschiedener Anzahl an Preisfestsetzungen und 2 Werten für das max. Die Resultate werden in Tabelle 4 gezeigt. Die wahren Werte wurden wieder durch die Trinomialmethode mit 200 und 400 Schritten zwischen den Preisfestsetzungen und der 2-Punkt Extrapolation approximiert. Hier findet man Fehler, welche ungefähr linear mit der Anzahl an Preisfestsetzungen sinken. Kleinere Fehler entstehen, wenn das max  $S_+$  weiter weg, vom aktuellen Preis  $S$  ist. Wie zuvor erwähnt, sind diese Resultate vergleichbar mit den diskreten Hindsight-Calls.

### 4.3 Baum-Methoden für stetige Lookback-Optionen

Wenn das max und min stetig festgelegt werden, gibt es analytische Formeln für europäische Lookback-Optionen. Jedoch sind numerische Prozesse notwendig um den Preis von amerikanischen Optionen mit stetiger Festsetzung zu bestimmen. In dieser Sektion wollen wir die verschiedenen Modifikationen zur Trinomialmethode für die Preisbestimmung diskreter Optionen betrachten. Wir behandeln Lookbacks mit und ohne max oder

**Tabelle 5** Ergebnisse der drei Trinomialmethoden zur Preisbestimmung eines stetigen Lookback-Calls. Die Parameter sind:  $S_0 = 100$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $T = 0.2$ , wobei die Anzahl der Schritte durch  $n$  indiziert wird. Die linke Seite zeigt die grundlegende Trinomialmethode, in der Mitte wird die Babbs-methode gezeigt und rechts wird eine Korrektur nach der Preisbestimmung ausgeführt. Alle Methoden benutzen den Parameter  $\lambda^* = 1.22474$ . Die grundlegende Methode benutzt Extrapolation des Grades  $1/2$ , die anderen lineare. Der analytische Wert der Option ist 10.71902.

| $n$  | grundlegende |             | Babbs    |             | korrigierte |             |
|------|--------------|-------------|----------|-------------|-------------|-------------|
|      | Trinom       | 2-pkt Extr. | Trinom   | 2-pkt Extr. | Trinom      | 2-pkt Extr. |
| 25   | 9.36106      |             | 10.66695 |             | 10.83824    |             |
| 50   | 9.73612      | 10.64150    | 10.69286 | 10.71878    | 10.77882    | 10.71939    |
| 100  | 10.01267     | 10.68028    | 10.70591 | 10.71869    | 10.74896    | 10.71911    |
| 200  | 10.21391     | 10.69968    | 10.71246 | 10.71900    | 10.73400    | 10.71904    |
| 400  | 10.35903     | 10.70937    | 10.71574 | 10.71901    | 10.72651    | 10.71902    |
| 800  | 10.46306     | 10.71420    | 10.71738 | 10.71902    | 10.72277    | 10.71902    |
| 1600 | 10.53733     | 10.71661    | 10.71820 | 10.71902    | 10.72089    | 10.71902    |
| 3200 | 10.59019     | 10.71781    | 10.71861 | 10.71902    | 10.71996    | 10.71902    |

min.

Als nächstes wollen wir die Leistungsfähigkeit der Trinomialmethode der vorherigen Sektion zur Preisbestimmung stetiger Lookback-Optionen bestimmen. Die linke Seite von Tabelle 5 zeigt die langsame Konvergenz der grundlegenden Trinomialmethode. Die Konvergenzordnung ist ungefähr  $1/2$  in der Anzahl der Zeitschritte und die Benutzung der 2-Punkt Extrapolation verbessert die Konvergenzgeschwindigkeit signifikant. Babbs stellt eine alternative Methode, welche auf einer „reflektierenden Barriere“ basiert, vor. Implementiert man diese Prozedur in die Trinomialmethode verbessert man die Konvergenzgeschwindigkeit, wie der mittlere Teil von Tabelle 5 zeigt. Des Weiteren könnten wir die Approximation  $1ter$  Ordnung aus Gleichung 4.5 benutzen um die Ergebnisse der diskreten Trinomialmethode zur Approximation, stetiger Lookback-Preise, zu berichtigen. Genauer gesagt, definieren wir für Lookback-Calls den *korrigierten Trinomialpreis*  $V'_n$  als

$$V'_n = (V_n - S_0)e^{-0.5\lambda\sigma\sqrt{T/n}} + S_0 \quad (4.6)$$

wobei  $V_n$  der standard Trinomialpreis ist, mit  $n$  Zeitschritten und  $\lambda$  als trinomialer Streckparameter. Zum Beispiel ist der mit der grundlegenden Trinomialmethode und  $n = 25$  Schritten berechnete Preis in Tabelle 5 9.36106. Der korrigierte Wert mit 4.6 ist 10.83824. Die Werte mit der 2-Punkt Extrapolation sind auf der rechten Seite von Tabelle 5 gegeben. Die Konvergenz von Babbs „reflektiver Trinomialmethode“ und der korrigierten Trinomialmethode sind im Endeffekt ununterscheidbar und beide sind der standard Methode klar überlegen.

Wir wollen nun die Wichtigkeit des Streckparameters  $\lambda$  zeigen, wenn er im Kombination mit der Extrapolation verwendet wird. Tabelle 6 zeigt die Resultate einer Preisbestimmung stetiger Lookback-Calls mit Babb's reflektiver Trinomialmethode. Auf der linken

**Tabelle 6** Hier wird der Effekt von  $\lambda$  auf die Trinomialmethode bei der Preisbestimmung eines stetigen Calls gezeigt. Die Parameter sind:  $S_0 = 100$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $T = 1.0$ , wobei  $n$  die Anzahl der Schritte ist. Alle Methoden benutzen Babb's Reflektionsmethode und in den Spalten mit 2-Pkt Extr. wird lineare Extrapolation verwendet. Auf der linken Seite ist  $\lambda = 1.02$ , in der Mitte 1.42 und rechtes alterniert es zwischen 1.02 und 1.42. Der analytische Wert der Option ist 23.78844.

| $n$  | $\lambda = 1.02$ |             | $\lambda = 1.42$ |             | $\lambda$ Alternates |             |
|------|------------------|-------------|------------------|-------------|----------------------|-------------|
|      | Trinom           | 2-pkt Extr. | Trinom           | 2-pkt Extr. | Trinom               | 2-pkt Extr. |
| 100  | 23.76633         |             | 23.72183         |             | 23.76633             |             |
| 200  | 23.77737         | 23.78841    | 23.75512         | 23.78841    | 23.75512             | 23.74390    |
| 400  | 23.78290         | 23.78843    | 23.77177         | 23.78843    | 23.78290             | 23.81068    |
| 800  | 23.78567         | 23.78843    | 23.78010         | 23.78843    | 23.78010             | 23.77731    |
| 1600 | 23.78705         | 23.78844    | 23.78427         | 23.78844    | 23.78705             | 23.79400    |
| 3200 | 23.78774         | 23.78844    | 23.78635         | 23.78844    | 23.78635             | 23.78566    |

Seite bleibt  $\lambda$  konstant bei 1.02. In der Mitte wird es konstant bei 1.42 gehalten und die rechte Seite zeigt den Effekt eines, zwischen 2 Werten alternierenden, Lambdas. Wenn  $\lambda$  entweder bei 1.02 oder 1.42 konstant bleibt ist die Konvergenz des Preises monoton, und wird drastisch verbessert wenn die Extrapolationsformel verwendet wird. Alterniert  $\lambda$  zwischen zwei Werten, ist die Konvergenz nicht mehr monoton und wird deutlich verlangsamt. Aufgrund dessen wird  $\lambda$  bei der verbesserten Trinomialmethode nahe konstant gehalten.

Wir haben nun gesehen, dass die grundlegende Trinomialmethode bei der Preisbestimmung stetiger Lookback-Optionen eher langsam konvergiert, jedoch sind erhebliche Beschleunigungen durch eine „reflektierende“ Barriere oder eine Korrektur des Preises möglich. Wenn es ein max oder min gibt verändert sich die Situation erneut. Obwohl in diesem Fall beide Methoden langsam konvergieren, lässt sich die Geschwindigkeit auch hier durch eine Korrektur des min oder max verbessern. Für die reflektierende Methode ist das korrigierte min  $S'_-$  definiert durch

$$S' = (S_-)e^{2(0.5)\lambda\sigma\sqrt{h}}. \quad (4.7)$$

Der Faktor 2 erscheint aufgrund der reflektierenden Grenze, welche in Theorem 10.6 bei Sigmund vorgestellt wird.

Bei der Methode der reflektierenden Barriere wird  $\lambda$  genau so wie im Falle eines diskreten Lookbacks gewählt, d.h.  $\lambda$  ist nah bei  $\lambda^*$  und eine Ebene von Verzweigungen fällt mit dem Verhältnis des min oder max mit dem aktuellen Preis, zusammen. Für die „korrigierte min“ Methode wird das min wie in Gleichung 4.7 verschoben, während  $\lambda$  anfangs als  $\lambda^*$  gewählt wird. Damit das Verhältnis exakt mit der Verzweigungsebene zusammenfällt, muss  $\lambda$  leicht, wie bereits beschrieben, angepasst werden. Glücklicherweise wird dieses Fixpunktproblem leicht durch eine Iteration dieser Prozedur gelöst und die Konvergenz tritt bereits nach wenigen Iterationen auf.

**Tabelle 7** Ergebnisse von 2 Trinomialmethoden zur Preisbestimmung eines stetigen Lookback-Calls. Die Parameter sind:  $S_0 = 110$ ,  $S_- = 100$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.3$ ,  $T = 0.2$ , wobei  $n$  die Anzahl der Schritte ist. Die linke Seite zeigt Babb's Reflektionsmethode. Rechts wird zu dieser das min verschoben so wie in 4.7. Beide benutzen einen Parameter nahe bei  $\lambda^* = 1.22474$ , wobei  $S_0/S_-$  mit einer Schichte von Verknüpfungen zusammenfällt. Die Reflektionsmethode benutzt Extrapolation der Ordnung  $1/2$ , die Methode mit dem korrigierten min lineare. Der analytische Wert ist 14.45970

| $n$  | Babbs    |             | Babbs + korrigierte min |             |
|------|----------|-------------|-------------------------|-------------|
|      | Trinom   | 2-pkt Extr. | Trinom                  | 2-pkt Extr. |
| 25   | 16.10640 |             | 14.23807                |             |
| 50   | 15.70332 | 14.73030    | 14.34392                | 14.44977    |
| 100  | 15.28256 | 14.26683    | 14.40389                | 14.46386    |
| 200  | 15.07963 | 14.58975    | 14.43086                | 14.45782    |
| 400  | 14.87165 | 14.36960    | 14.44576                | 14.46066    |
| 800  | 14.76944 | 14.52269    | 14.45249                | 14.45923    |
| 1600 | 14.67506 | 14.44724    | 14.45613                | 14.45977    |
| 3200 | 14.60977 | 14.45216    | 14.45793                | 14.45973    |
| 6400 | 14.56739 | 14.46508    | 14.45881                | 14.45968    |

Numerische Resultate zur Preisbestimmung stetiger Lookback-Calls mit min werden in Tabelle 7 gezeigt. Sie zeigen die langsame Konvergenz der Trinomialmethode mit der „reflektierenden“ Barriere, die mithilfe der 2-Punkt Extrapolation verbessert werden kann. Die „korrigierte min“ Methode konvergiert viel schneller und wird ebenfalls durch Extrapolation verbessert. Zum Beispiel hat die „reflektierende“ Methode mit 800 Zeitschritten einen Fehler von 31 Cent, während die korrigierte min Methode Penny-Genauigkeit erreicht. Mithilfe von unserer Verknüpfung der Hindsight und Lookback-Optionen gelten diese Ergebnisse auch für die entsprechenden Hindsight-Puts.

## 4.4 Zusammenfassung

Wir haben die, bei der Preisbestimmung von Optionen, welche von einem Basisobjekt, dessen Wert in diskreter Zeit gemessen wird, abhängen, entstehenden Probleme behandelt und zahlreiche Korrekturausdrücke, welche die Approximationen der diskreten Werte mit stetigen Formeln erheblich erleichtern, eingeführt. Die Korrekturausdrücke beinhalten das Verschieben von Barrieren und des Wertes des Basisobjekts. Des Weiteren haben wir speziell angepasste numerische Methoden zur Beurteilung von Approximationen und der genaueren Preisbestimmung von Optionen vorgestellt. Diese Methoden enthalten ähnliche Korrekturausdrücke wie die in den Theoremen verwendeten, nur dass sie hier auf die Gitter angewandt werden.

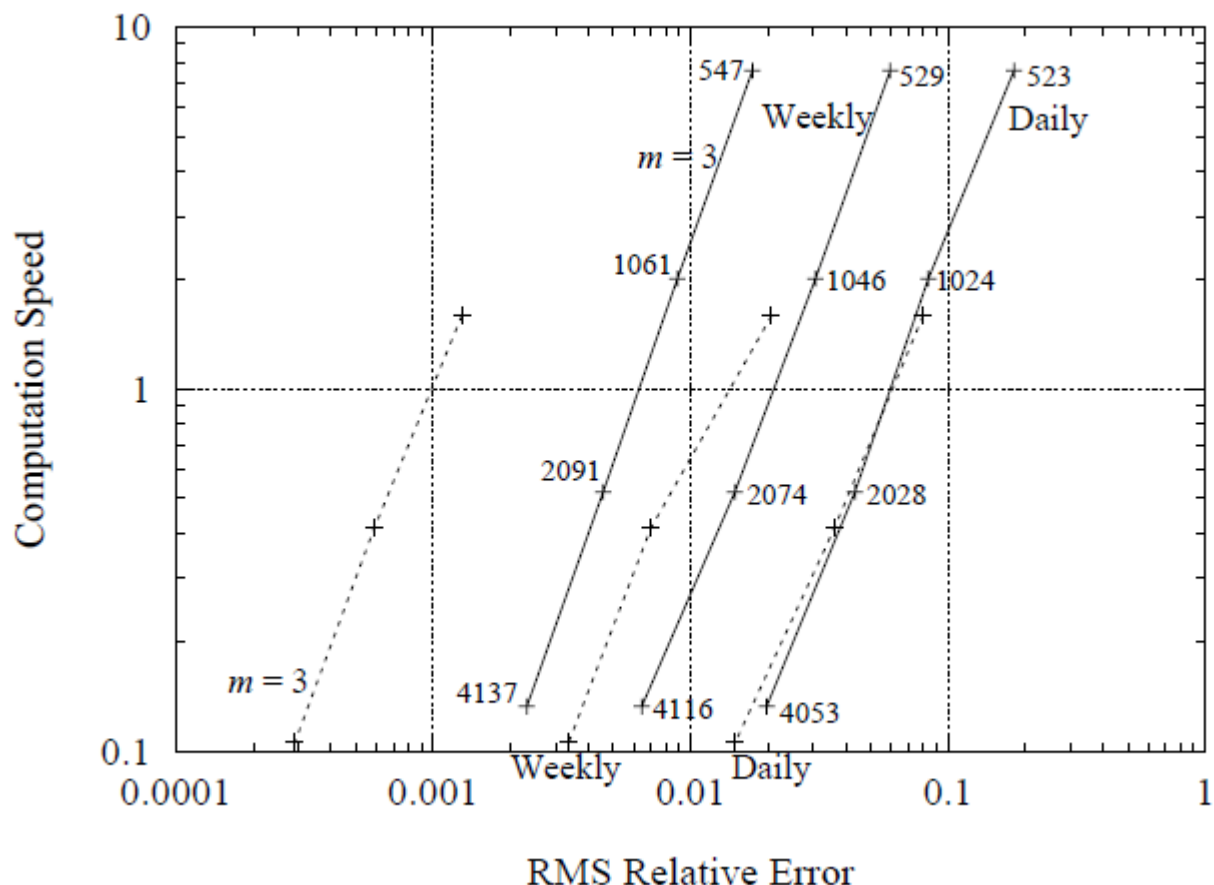


Abbildung 4.2: Hier wird die Leistung der verbesserten Trinomialmethode zur Preisbestimmung von down-and-out Calls mit täglicher, wöchentlicher, und 3-facher Preisfestsetzung gezeigt. Die Zahlen neben den Methoden entsprechen der durchschnittlichen Anzahl an Zeitschritten. Der RMS-Fehler wird wieder in Prozent angegeben. Die besseren Methoden sind wieder im oberen linken Eck. Strichlierte Linien zeigen die Resultate mit 2-Punkt Extrapolation. Die Approximation aus Theorem 1 hat einen Fehler von 1.5%, 1.58% und 0.007% für jeweils  $m = 3$ , wöchentliche und tägliche Preisfestsetzungen und eine Berechnungsgeschwindigkeit von 25,000 Optionen pro Sekunde. Die modifizierte korrigierte Barrieren Approximation hat einen Fehler von 0.273%, 0.046% und 0.010% mit der jeweiligen Anzahl an Preisfestsetzungen.

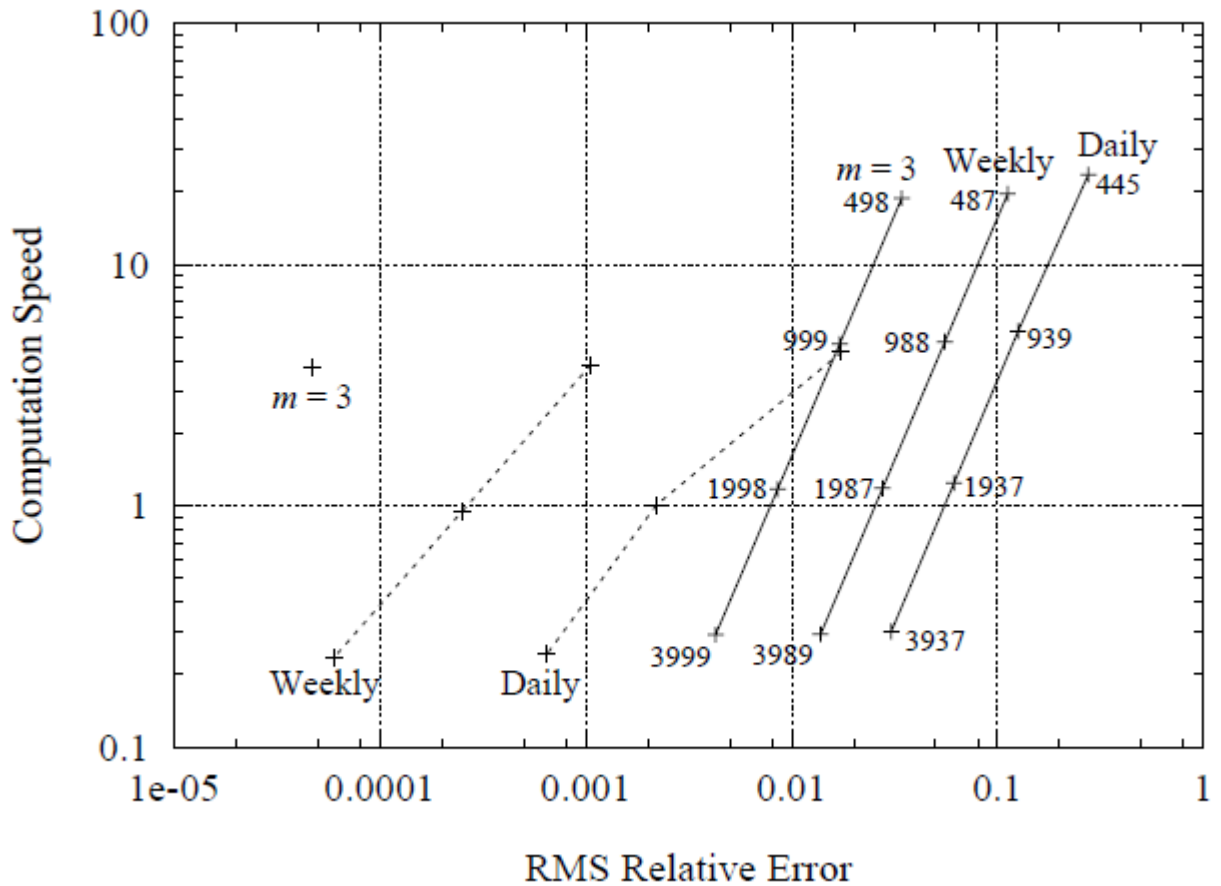


Abbildung 4.3: Hier wird die Leistung der Trinomialmethode zur Preisbestimmung diskreter Lookback-Puts mit täglicher, wöchentlicher und 3-facher Preisbestimmung auf einem 133Mhz Pentium prozessor gezeigt. Der RMS-Fehler wird in Prozent angegeben. Die Zahl neben den Methoden zeigt die durchschnittliche Anzahl an Zeitschritten. Strichlierte Linien zeigen die Resultate mit 2-Punkt Extrapolation. Die Approximation 1ter Ordnung aus 4.5 hat einen Fehler von 15.62%, 2.014% und 0.394% mit jeweils  $m = 3$ , wöchentlicher und täglicher Preisfestsetzung und eine Berechnungsgeschwindigkeit von 62,500 Optionen pro Sekunde. Die Approximation 2ter Ordnung aus Theorem 2 (ohne Kovarianzausdruck) hat einen Fehler von 3.475%, 0.028% und 0.035% mit den jeweiligen Preisfestsetzungen und einer Berechnungsgeschwindigkeit von 45,000 Optionen pro Sekunde.



# Kapitel 5

## Literaturverzeichnis

- 1 Abramowitz, M., Stegun, I.: Handbook of mathematical functions, 10th edn. New York: Dover 1972 and continuous monitoring.
- 2 Ait-Sahlia, F.: Optimal stopping and weak convergence methods for some problems in financial economics, Doctoral dissertation, Department of Operations Research, Stanford University, Stanford, CA (1995)
- 3 Andersen, L., Brotherton-Ratcliffe, R.: Exact exotics. Risk 9, 85–89 (1996)
- 4 Asmussen, S.: Applied probability and queues. Chichester, England: Wiley 1987
- 5 Asmussen, S., Glynn, P., Pitman, J.: Discretization error in simulation of one-dimensional reflecting brownian motion. Ann. Appl. Probab. 5, 875–896 (1995)
- 6 Babbs, S.: Binomial valuation of lookback options, working paper. Midland Global Markets, London (1992)
- 7 Black, F., Cox, J.: Valuing corporate debt: Some effects of bond indenture provisions. J. Finance 31, 351–367 (1976)
- 8 Black, F., Scholes, M.: The pricing of options and corporate liabilities. J. Polit. Econ. 81, 637–654 (1973)
- 9 Boyle, P.: A lattice framework for option pricing with two state variables. J. Financial and Quantitat. Anal. 23, 1–12 (1988)
- 10 Boyle, P.P., Lau, S.H.: Bumping up against the barrier with the binomial method. J. Derivat. 1, 6–14 (Summer, 1994)
- 11 Boyle, P., Broadie, M., Glasserman P.: Monte carlo methods for security pricing. J. Econ. Dynamics Control 21, 1267–1321 (1997)
- 12 Brenner, R.: Volatility is not constant. In: Nelken, I. (ed.) Handbook of Exotic Options: Instruments, Analysis, and Applications. Chicago, Illinois: Irwin 1995, pp. 293–315
- 13 Broadie, M., Glasserman, P., S. Kou.: A continuity correction for discrete barrier Options. Math. Finance 7, 325–349 (1997)

- 14 Broadie, M., Detemple, J.: American option valuation: new bounds, approximations, and a comparison of existing methods. *Rev. Financial Studies* 9, 1211–1250 (1996)
- 15 Calvin, J.M.: Average performance of passive algorithms for global optimization. *J. Math. Anal. Appl.* 191, 608–617 (1995)
- 16 Carr, P.: Two extensions to barrier option valuation. *Appl. Math. Finance* 2, 173–209 (1995)
- 17 Chernoff, H.: Sequential tests for the mean of a normal distribution IV. *Ann. Math. Statist.* 36, 55–68 (1965)
- 18 Chance, D.M.: The pricing and hedging of limited exercise caps and spreads. *J. Financial Res.* 17, 561–584 (1995)
- 19 Chang, J.T., Peres, Y.: Ladder heights, gaussian random walks and the Riemann zeta function. Working paper, Yale University, 1995
- 20 Cheuk, T., Vorst, T.: Complex barrier options, *J. Derivat.* 4, 8–22 (Fall, 1996)
- 21 Cheuk, T., Vorst, T.: Currency lookback options and the observation frequency: A binomial approach. *J. Int. Money Finance* 16, 173–187 (1997)
- 22 Chuang, C.-S.: Joint distribution of brownian motion and its maximum, with a generalization to correlated BM and applications to barrier options. *Statist. Probab. Lett.* 28, 81–90 (1996)
- 23 Conze, A., Viswanathan, R.: Path dependent options: The case of lookback options. *J. Finance* 46, 1893–1907 (1991)
- 24 Cox, J.C., Ross, S.A., Rubinstein, M.: Option pricing: A simplified approach. *J. Financial Econ.* 7, 229–263 (1997)
- 25 Feller, W.: An introduction to probability theory and its applications. New York: Wiley 1968
- 26 Flesaker, B.: The design and valuation of capped stock index options. Working paper, Department of Finance, University of Illinois, Champaign, IL, 1992
- 27 Garman, M.: Recollection in tranquillity. *Risk* 2, 16–18 (March 1989). (Reprinted in: *From black-scholes to black holes: New frontiers in options. Risk/Finex* 1992, 171–175)
- 28 Geske, R., Johnson, H.E.: The American put options valued analytically. *J. Finance* 39, 1511–1524 (1984)
- 29 Goldman, M.B., Sosin, H., Gatto, M.: Path dependent options: Buy at the low, sell at the high. *J. Finance* 34, 1111–1127 (1979)
- 30 Goldman, M.B., Sosin, H., Shepp, L.: On contingent claims that insure ex-post optimal stock market timing. *J. Finance* 34, 401–414 (1979)

- 31 Heynen, R.C., Kat, H.M.: Crossing barriers. *Risk* 7, 46–49 (June, 1994), Correction *Risk* 8, 18 (March, 1995) (Reprinted in: R. Jarrow (ed.) *Over the rainbow: developments in exotic options and complex swaps*. *Risk/FCMC* 179–182)
- 32 Heynen, R.C., Kat, H.M.: partial barrier options. *J. Financial Eng.* 3, 253–274 (1994)
- 33 Heynen, R.C., Kat, H.M.: Selective memory. *Risk* 7, 73–76 (November, 1994). (Reprinted in: R. Jarrow (ed.) *Over the rainbow: developments in exotic options and complex swaps*. *Risk/FCMC*, 197–202.)
- 34 Heynen, R.C., Kat, H.M.: Lookback options with discrete and partial monitoring of the underlying price. *Appl. Math. Finance* 2, 273–284 (1995)
- 35 Heynen, R.C., Kat, H.M.: Discrete partial barrier options with a moving barrier. Working paper, First National Bank of Chicago, Tokyo, Japan, 1995
- 36 Hull, J., White, A.: Efficient procedures for valuing european and american path-dependent options. *J. Derivat.* 1, 21–31 (Fall, 1993)
- 37 Kamrad, B., Ritchken, P.: Multinomial approximating models for options with k state variables. *Manag. Sci.* 37, 1640–1652 (1991)
- 38 Kat, H.M.: Pricing lookback options using binomial trees: An evaluation. *J. Financial Eng.* 4, 375–397 (1995)
- 39 Kat, H.M., Verdonk, L.: Tree surgery. *Risk* 8, 53–56 (February, 1995)
- 40 Knopp, K.: *Theory and applications of infinite series*. New York: Dover 1990
- 41 Kunitomo, N., Ikeda, M.: Pricing options with curved boundaries. *Math. Finance* 2, 275–298 (1992)
- 42 Leland, H.E.: Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure. *J. Finance* 49, 1213–1252 (1994)
- 43 Levy, E., Manton, F.: Discrete by nature. *Risk* 10, 74–75 (January, 1997)
- 44 Li, A., Lu, S.: Lattice methods for barrier options: A probabilistic approach. Working paper, First National Bank of Chicago, 1995
- 45 Liu, Y.: Numerical approaches to reflected diffusion processes. Working paper, Purdue University, 1993
- 46 Longstaff, F.A.: How much can marketability affect security values? *J. Finance* 50, 1767–1774 (1995)
- 47 Longstaff, F.A., Schwartz, E.S.: A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt. *J. Finance* 50, 789–819 (1995)
- 48 Merton, R.C.: Theory of rational option pricing. *Bell J. Econ. Manag. Sci.* 4, 141–183 (1973)

- 49 Merton, R.C.: On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *J. Finance* 29, 449–469 (1974)
- 50 Omberg, E.: Efficient discrete time jump process models in option pricing. *J. Financial Quantitat. Anal.* 23, 161–174 (1988)
- 51 Rich, D.: The mathematical foundations of barrier option pricing theory. *Adv. Futures Options Res.* 7, 267–312 (1994)
- 52 Rich, D.: The valuation of black-scholes options subject to intertemporal default risk. *Rev. Derivat. Res.* 1, 25–59 (1996)
- 53 Ritchken, P.: On pricing barrier options. *J. Derivat.* 3, 19–28 (Winter, 1995)
- 54 Rubinstein, M., Reiner, E.: Breaking down the barriers. *Risk* 4, 28–35 (September, 1991)
- 55 Schervish, M.: Algorithm AS195: Multivariate normal probabilities with error bound. *Appl. Statist.* 33, 81–94 (1984)
- 56 Schervish, M.: Correction to multivariate normal probabilities with error bound. *Appl. Statist.* 34, 103–104 (1984)
- 57 Siegmund, D.: *Sequential analysis: Tests and confidence intervals*. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1985
- 58 Siegmund, D., Yuh, Y-S.: Brownian approximations for first passage probabilities. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete* 59, 239–248 (1982)