Seminararbeit
aus Finanz- und Versicherungsmathematik

Betreuer: Dr. Stefan Gerhold

Die Netto-Insolvenz-Konstante

Sophie Nikowitsch
1225736

Wintersemester 2014/2015

Inhaltsverzeichnis:

1 Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Auswirkung der Rückversicherung auf das Risiko eines Portfolios. Das Risiko eines Versicherungsbestands liegt darin, dass die Schadenzahlungen die eingenommenen Prämien übersteigen könnten und der Versicherer somit einen Verlust erzielt. Um dies zu verhindern sind die Versicherer versucht eine große Anzahl von Polizzen zu übernehmen, da dann das Gesetz der großen Zahlen wirkt. Dieses besagt, dass sich mit der Anzahl der betrachteten Objekte die Wahrscheinlichkeit des einzelnen an die theoretische Wahrscheinlichkeit annähert. So kann man die Schadenzahlungen besser voraussagen und die Prämie besser schätzen. Doch kein Versicherer kann es sich leisten, eine so große Anzahl von Risiken zu übernehmen. Hier kommt die Rückversicherung ins Spiel. Der Versicherer übernimmt mehr Risiko als er sich leisten kann und gibt dann Teile davon an einen oder mehrere Rückversicherer ab. Hier stellt sich jedoch die Frage, wie viel ein Versicherer von seinem Bestand an einen Rückversicherer abgeben soll.

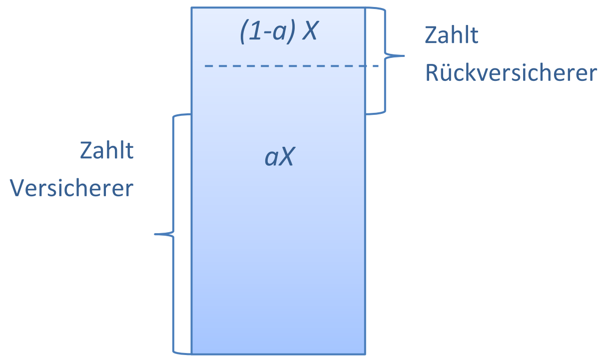
In dieser Arbeit wird eine Konstante eingeführt, welche das Risiko bemisst - Die Netto-Insolvenz-Konstante. In Kapitel 4 und 5 wird für nicht-proportionale und proportionale Rückversicherung das Maximum dieser Größe gesucht, um den optimalen Rückversicherungsanteil eines Portfolios berechnen zu können. Die darauf folgenden Kapitel präsentieren einige Sätze über die Eigenschaft der Netto-Insolvenz-Konstante.

2 Notation und Annahmen

Gegeben ist ein Portfolio, aus n unabhängigen Risiken $R_i \; i = \{1,..,\}$. Das Risiko kann entweder aus einer einzigen oder einer Vielzahl von Polizzen bestehen. Wichtig ist, dass pro Risiko ein bestimmter Rückversicherungsvertrag verwendet wird. Es werden zwei Arten der Rückversicherung unterschieden, proportionale und nichtproportionale. In dieser Arbeit wird jeweils eine bestimmte Vertragsart behandelt. Bei der proportionalen Versicherung wird der Quotenvertrag und bei der nicht-proportionalen der Schadenexzedentenvertrag, auch Excess of Loss (XL) genannt, betrachtet.

Angenommen für das i-te Risiko R_i ist ein Betrag von X fällig.

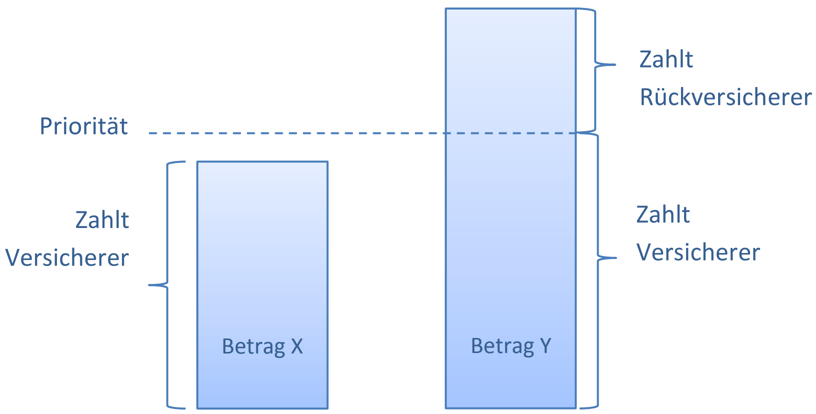
- Bei den Quotenverträgen wird der Betrag *X* einfach proportional aufgeteilt. Es gibt also für das Risiko R_i ein Rückversicherungslimit $a_i \; i = \{1,..,\}$ und der Versicherer zahlt diesen Anteil des Betrags, also aX. Der Rest des Gesamtbetrages, *(1-a)X,* wird von einem oder mehreren Rückversicherer gezahlt.



- Handelt es sich um einen Excess of Loss-Vertrag, so besteht eine obere Schranke, genannt Priorität S_i, bis zu welcher der Versicherer haftet. Er zahlt also

$$\boldsymbol{X} \quad falls\ X \leq S_i \qquad oder \qquad \boldsymbol{S_i} \quad falls\ X \geq S_i$$

  Überschreitet der zu zahlende Betrag dieses Limit so ist der Rückversicherer verpflichtet, den darüber liegenden Beitrag zu leisten. Es gibt auch die Möglichkeit, mehrere Prioritäten mit mehreren Rückversicherern abzuschließen. Jeder Rückversicherer zahlt dann von seiner Priorität bis an die Priorität des nächsten. In dieser Arbeit wird aber nur eine einzige Priorität betrachtet.



Die Rückversicherungslimits eines Portfolios werden allgemein mit dem Vektor $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ bezeichnet, egal ob es sich um eine proportionale oder nichtproportionale Rückversicherung handelt. Zu beachten ist, dass entweder nur proportionale oder nur nichtproportionale Rückversicherungen betrachtet werden.
Die Forderungen eines jeden Risikos haben eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung. Genauer gesagt wird also angenommen, dass die Anzahl der anfallenden Forderungen des i-ten Risikos ein Poisson-Prozess ist. Der Mittelwert der Anzahl der Forderungen wird mit p_i bezeichnet und die Größe jeder Zahlung hat die Verteilungsfunktion F_i. Außerdem wird angenommen, dass $F_i(0) = 0$, sodass nur eine positive Anzahl der Ansprüche möglich sein kann. Die Größe jeder Forderung ist unabhängig von den anderen Ansprüchen und der Zeit, in welcher sie sich ereignet.
Es wird vorausgesetzt, dass für die gesamte Prämie eines Jahres, bezeichnet mit *P,* gilt:

$$P > \sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^\infty x dF_i(x)$$

Die gesamte Prämie muss also größer sein als die voraussichtlichen Forderungen aller Risiken. Der Rückversicherer erhält als Gegenleistung für die Übernahme des i-ten Risikos $P_i(\lambda_i)$. Die Verteilungsfunktionen und Momenterzeugende der Netto-Verpflichtung, welche der Versicherer für das i-te Risiko zahlt, wird mit $F_i(*, \lambda_i)$ und $G_i(*, \lambda_i)$ bezeichnet. Zum Beispiel:

$$G(S_i, R) = \sum_{i=1}^{n} p_i + Rc(S) - \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\int_0^{S_i} e^{Rx} dF_i + exp\{RS_i\}(1 - F_i(S_i)) \right)$$

Wobei $c(s) = P - \sum_{i=1}^{n}(1 + \propto_i) p_i \int_{S_i}^{\infty} x\, f_i(x)\, dx - S_i(1 - F_i(S_i))$.

C(s) ist die gesamte jährliche Prämie minus der Rückversicherungsprämie, also jährliche Netto-Prämie. -steht in dieser Arbeit immer in Bezug auf die Rückversicherung. Die Netto-Prämie ist jene bei der der Rückversicherungsanteil bereits abgezogen ist und die Netto-Forderung ist also jener Betrag, den nur die Versicherung allein zu tragen hat.

3 Die Netto-Insolvenz-Konstante

Als Variable, welche das Risiko bemisst, wird die stets positive „Netto-Insolvenz-Konstante“ $R = \left(R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\right)$ verwendet. In der Literatur wird sie meistens als adjungierter Koeffizient bezeichnet. R ist eindeutig bestimmte durch die Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} p_i G_i(R, \lambda_i) - R\,\{ P - \sum_{i=1}^{n} P_i(\lambda_i) \} = 0$$

wenn dies existiert, anderenfalls hat sie den Wert 0. Die Netto-Insolvenz-Konstante berücksichtigt das Netto-Einkommen und die Netto-Forderungen des Versicherers. R muss also die Netto-Prämie so multiplizieren, dass es gleich den Netto-Zahlungen ist. Sind diese Beträge gleich, so besteht kein Risiko der Insolvenz, daher kommt der Name Netto-Insolvenz-Konstante.

Eine wichtige Voraussetzung für die Existenz von R ist:

$$P - \sum_{i=1}^{n} P_i(\lambda_i) \; > \sum_{i=1}^{\infty} p_i \int_0^{\infty} x\, dF_i(x, \lambda_i)$$

Dies bedeutet, dass das Netto-Einkommen des Versicherers höher sein soll als die voraussichtlichen Gesamt-Netto-Forderungen. Außerdem sollte die Momenterzeugende nicht unendlich werden. Dies können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen.

Eine anschaulicherer Variable für die Risikobemessung wäre die Varianz der Gesamt Netto-Forderungen. Die Netto-Insolvenz-Konstante hat aber zwei große Vorteile. Erstens berücksichtigt sie mehrere Werte der Netto-Forderungen-Verteilung als nur den Mittelwert und die Varianz. Dies wird später Folge noch numerisch nachgewiesen. Der zweite Vorzug der Netto-Insolvenz-Konstante ist, dass sie zusätzlich zu den Netto-Verbindlichkeiten auch das Netto-Einkommen betrachtet. Aus der Definition von *R* sieht man schnell, dass bei einer fixen Verteilungsfunktion G_i die Netto-Insolvenz-Konstante eine wachsende Funktion des Netto-Einkommens ist.

Die Lundberg Ungleichung

$$\psi(U) < \exp(-U * R) \qquad \forall U > 0$$

besagt, dass die Wahrscheinlichkeit des Ruins kleiner ist als die Exponentialfunktion hoch der negativen Zahl des Überschusses mal dem Parameter R, der mit dem Gewinn zusammenhängt. Durch diese Ungleichung kann man die Wahrscheinlichkeit des Verlustes durch die Netto-Insolvenz-Konstante darstellen.

$$P\{\text{Ü}berschuss < (-U)\} \;\; < \;\; \exp\{-U * \; R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\} \qquad f\text{ür}\; U > 0$$

Da R und U stets positiv sind, kann man aus der Ungleichung folgern, dass je größer die Netto-Insolvenz-Konstante, desto weniger risikoreich das Portfolio des Versicherers ist.

In Folge werden Resultate über den Zusammenhang der Netto-Insolvenz-Konstante und der Wahl der Risikogrenzen präsentiert. Zuerst bei nicht-proportionaler Rückversicherung und anschließend für proportionale. Dabei werden numerische Beispiele dargestellt, welche die Netto-Insolvenz-Konstante unter verschiedenen Voraussetzungen zeigt.

4 Excess of Loss Rückversicherung

4.1 Das Maximum der Netto-Insolvenz-Konstante

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der Netto-Insolvenzkonstante $R(S_1, S_2, \dots, S_n)$ bei Änderungen der Risikolimits $(S_1, S_2, \dots, S_n)$ betrachtet.

Wie schon oben erwähnt werden folgende Voraussetzungen getroffen:

1. $F_i(0) = 0$
2. $\int_0^\infty x^2 \exp(x)\, f_i(x)\, dx < \infty$
3. $P > \sum_{i=1}^n p_i m_i$ wobei m_i der Mittelwert von F_i ist

Folgende Umgebung werden zuvor noch definiert:

$$\Delta = \{S = (S_1, S_2, \dots, S_n) \in (0, \infty)^n |\, c(S) - \mu(S) > 0\}$$

$$\Delta' = \{S = (S_1, S_2, \dots, S_n) \in [0, \infty]^n |\, c(S) - \mu(S) \geq 0\}$$

Wobei $c(S) = P - \sum_{i=1}^n (1 + \alpha_i) p_i (\int_{S_i}^\infty x\, f_i(x)\, dx - S_i(1 - F_i(S_i)))$ die jährlichen Netto-Prämie und $\mu(S) = \sum_{i=1}^n p_i (\int_0^{S_i} x f_i(x)\, dx + S_i(1 - F_i(S_i))$ die jährlichen Netto-Forderungen repräsentieren.

Satz 1: Maximum von R(S)

<u>Voraussetzungen:</u>

a) $f_i(x) := \frac{dF_i}{dx}$ existiert und ist überall stetig.

b) $P_i(S_i) = (1 + \alpha_i) * \int_{M_i}^\infty (x - S_i)\, dF_i(x)\; für\; \alpha > 0$

c) $\sum_{i=1}^n P_i\,(0) > P$

<u>Dann folgt:</u>

i) *Es gibt eine eindeutige Menge von Risikogrenzen* $(S_1^*, S_2^*, \dots S_n^*) \in \Delta$ *für welche gilt:*

$$R\left(S_1^{*-1}, S_2^{*-1}, \dots S_n^{*-1}\right) = S_1^{*-1} log(1 + \alpha_1) = \dots = S_n^{*-1} log(1 + \alpha_n)$$

ii) *für irgendwelche Grenzen* $(S_1, S_2, \dots, S_n) \in \Delta'$ *gilt:*

$$R(S_1, S_2, \dots, S_n) \leq R(S_1^*, S_2^*, \dots S_n^*)$$

iii) *ist für* $i = 1,2, \dots, n \quad F_i(x) < 1, \quad \forall x < \infty$ *dann gilt:*

R nimmt ein eindeutig bestimmtes lokales Maximum in Δ *im Punkt* S^* *an und*

$\forall\, (S_1, S_2, \dots, S_n) \in \Delta'$ *und* $S \neq S^*$ *sogar, dass:*

$$R(S_1, S_2, \dots, S_n) < R(S_1^*, S_2^*, \dots S_n^*)$$

Kommentar:

Voraussetzung a) ist von sehr technischer Herkunft. Sie wird in Lemma 2 ausgetauscht. b) besagt, dass die Prämie des Rückversicherers mit der expected value principle berechnet werden soll. Entscheidend ist Voraussetzung c). Sie fordert, dass bei der Rückversicherung des gesamten Portfolios, also wenn die Priorität für jedes Risiko R_i bei 0 liegt, d.h. $P_i(0)$, die Kosten für die Rückversicherung P_i die gesamt eingenommene Prämie P übersteigt sollen. Dies ist aber keine große Einschränkung, da ohne c) die Netto-Insolvenz-Konstante ins Unendliche ansteigen könnte, $R(0,0,\dots,0) = \infty$. Das würde bedeuten, dass die Wahrscheinlichkeit einer Insolvenz bei 0 liegt, wenn man sein gesamtes Risiko rückversichert. Diese Voraussetzung könnte man genauer bezeichnen mit:

$$P < \sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)p_i m_i$$

Die Folgerungen von Satz 1 besagen, dass die Netto-Insolvenz-Konstante nur ein Maximum besitzt, also eine unimodale Funktion ist. Man kann die Risikogrenzen so wählen, dass die Netto-Insolvenz-Konstante maximal wird und damit das Risiko minimiert wird.

Beweis:

i) Definiere für $\lambda > 0$ eine Hilfsfunktion $H(\lambda)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} H(\lambda) = {} & \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i + P \\ & - \sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)p_i \\ & * \int_{\lambda \log(1+\alpha_i)}^{\infty} x\, f_i(x)dx - \lambda \log(1+\alpha_i)(1 - F_i(\lambda \log(1+\alpha_i))) \\ & - \sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{\lambda \log(1+\alpha_i)} \lambda \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) f_i(x)dx + \lambda(1+\alpha_i)(1 - F_i(\lambda \log(1+\alpha_i))) \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass

- $\lim_{\lambda\to 0} H(\lambda) = 0 + P - \sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)p_i\, m_i - 0 \quad < 0$ nach Voraussetzung c
- $\lim_{\lambda\to\infty} H(\lambda) = 0 + P - 0 - \sum_{i=1}^{n} p_i\, m_i \quad > 0$ nach Voraussetzung 3, unter Verwendung von Voraussetzung 2
- $\frac{d^2H}{d\lambda^2} \leq 0$ für alle $\lambda > 0$, denn die ersten 2 Summanden verschwinden und die letzten beiden differenziert man mit der Produktregel. Die zweite Ableitung ist negativ, da $\alpha_i, p_i, f_i, ..$ alle positiv sind.

Daraus folgt, dass es einen eindeutig bestimmten Punkt λ^* gibt, sodass

$$0 < \lambda^* < \infty \text{ und } \mathrm{H}(\lambda^*) = 0$$

Aus der Definition sieht man, dass die Funktion $H(\lambda^*)$ dem oben definierten $G(S^*, \frac{1}{\lambda^*})$ mit $S^* = \lambda^* \log(1+\alpha_i)$ entspricht. Denn:

$$G(S_i, R) = \sum_{i=1}^{n} p_i + R\left(P - \sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)p_i \left(\int_{S_i}^{\infty} x\, f_i(x)\, dx - S_i(1 - F_i(S_i))\right)\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\int_0^{S_i} e^{Rx} df_i + exp\{RS_i\}(1 - F_i(S_i))\right)$$

Setzt man nun die S^* und $\frac{1}{\lambda^*}$ ein und multipliziert alles mit λ^*, so folgt:

$$= \lambda^* \sum_{i=1}^{n} p_i + \lambda^* \frac{1}{\lambda^*} P - \lambda^* \frac{1}{\lambda^*} \sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)p_i * \left(\int_{\lambda^* log(1+\alpha_i)}^{\infty} x\, f_i(x)\, dx - \lambda^* log(1+\alpha_i)\,(1 - F_i(\lambda^* log(1+\alpha_i)))\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\int_0^{log(1+\alpha_i)} \lambda^* e^{x/\lambda^*} dF_i + \lambda^* exp\left\{\frac{1}{\lambda^*} \lambda^* \; log(1+\alpha_i)\right\}(1 - F_i(\lambda^* log(1+\alpha_i)))\right)$$

$$= \lambda^* \sum_{i=1}^{n} p_i + P - \sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)p_i \left(\int_{\lambda^* log(1+\alpha_i)}^{\infty} x\, f_i(x)\, dx - \lambda^* log(1+\alpha_i)\,(1 - F_i(\lambda^* log(1+\alpha_i)))\right) - \sum_{i=1}^{n} p_i \left(\int_0^{log(1+\alpha_i)} \lambda^* e^{x/\lambda^*} dF_i + \lambda^*(1+\alpha_i)(1 - F_i(\lambda^* log(1+\alpha_i)))\right)$$

Das entspricht $\mathrm{H}(\lambda^*)$. Da $\lambda^* \neq \infty$ ist, folgt aus der Definition von Δ, dass $S^* \in \Delta$ und λ^* eindeutig bestimmt sind.

iii) Zuerst ist zu zeigen, dass R ein lokales Maximum in Δ hat und dieses in S^* erreicht wird. *R(S)* ist implizit durch die Gleichung *G(S, R(S))* = 0 definiert. Leitet man diese Funktion nach S_j ab und setzt man $\frac{dR}{dS_j} = 0$, so erhält man:

$$R\left(1 - F_j(S_j)\right) + F_j'\left(S_j\right) - \frac{d}{dS_j}\int_{S_j}^{\infty} x\, f_j(x)dx - p_j\left(\exp\{R * S_j\}\, f_j\left(S_j\right) + \exp\{R * S_j\}\left(-F_j'\right) + \left(1 - F_j\right)\exp\{R * S_j\} * R\right)$$

Das ist Null wenn: $R = 0$, $F_j\left(S_j\right) = 1$ oder $R(S) = S_j^{-1}\log(1+\alpha_j)$ ist. Also kann der einzige Extremwert von R in Δ an der Stelle S^* sein. An diesem Punkt gilt: $\frac{d^2R}{dS_j^2} < 0$ und $\frac{d^2R}{dS_k dS_j} = 0$ für $k \neq j$. Daraus folgt, dass S^* ein Maximum ist.

Als nächstes zeigt man die Ungleichung: $R(S) < R(S')$ für $S \in \Delta'$ und $S \neq S'$. $S' \in \Delta'$ ist also jener Punkt, an welchem R sein Maximum erreicht. Mit dem Satz über implizite Funktionen kann man die Stetigkeit von R nachprüfen. Mit dieser Eigenschaft und der Kompaktheit von Δ' erhält man die Existenz des Maximum-Punktes. Wählt man $S' \neq S^*$ dann muss $S' \in \Delta'\backslash\Delta$ da sonst S‘ ein lokales Maximum in Δ wäre. Daraus folgt für die Rückversicherungslimits S entweder:

i) $c(S') - \mu(S') = 0$,
ii) zumindest eins der S_i' ist Null oder
iii) zumindest eins der S_i' ist unendlich.

Tritt der erste Fall ein so folgt, dass auch R den Wert Null annimmt, daher ist dieser Fall nicht wichtig. Man betrachtet also die Fälle dass S_i' Null oder Unendlich ist. Dafür wird eine Variable S_1^0 und eine Funktion $r(S_1)$ im Intervall $[S_1^0, \infty]$ wie folgt definiert:

$$S_1^0 = \min\{S_1 \in [0,\infty) | c(S_1, S_2', S_3', \dots, S_n') - \mu(S_1, S_2', S_3', \dots, S_n') > 0\}$$

$$r(S_1) = R(S_1, S_2', S_3', \dots, S_n')$$

Um die Stetigkeit der Ableitung von r im Intervall (M_1^0, ∞) zu zeigen, nutzt man nun den Satz über implizite Funktionen. Setzt man $\frac{dr}{dS_1}$ gleich Null, so muss entweder $r(S_1) = 0$ oder $F_1(S_1) = 1$ oder $r(S_1) = S_1^{-1}\log(1+\alpha_1)$ gelten.
Für $0 < \lambda < \infty$ definiert man nun die Hilfsfunktion $h(\lambda)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} h(\lambda) = {} & \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i + P \\ & - \sum_{i=2}^{n} (1+\alpha_i) p_i \left[\int_{S_i'}^{\infty} x f_i \, dx - S_i' (1 - F_i(S_i')) \right] \\ & - (1+\alpha_1) p_1 \left[\int_{\lambda \log(1+\alpha_1)}^{\infty} x f_1(x) dx - \lambda \log(1+\alpha_1)(1 - F_1(\lambda \log(1+\alpha_1)) \right] \\ & - \lambda \sum_{i=2}^{\infty} p_i \left[\int_0^{S_i'} \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) f_i(x) dx + \exp\left(\frac{S_i'}{\lambda}\right)(1 - F_i(S_i') \right] \\ & - p_1 \left[\int_0^{\lambda \log(1+\alpha_1)} \lambda \exp\left(\frac{x}{\lambda}\right) f_i(x) dx + \lambda\,(1+\alpha_1)(1 - F_i(\lambda \log(1+\alpha_1)) \right] \end{aligned}$$

Man erkennt, dass

- $\lim_{\lambda \to 0^+} h(\lambda) = \begin{cases} P - \sum_{i=1}^{n} (1+\alpha_i) p_i m_i & \text{wenn } S_j' = 0 \ \ f\ddot{u}r\ j = 2, \dots, n \\ 0 & \text{Sonst} \end{cases}$
- $\lim_{\lambda \to \infty} \frac{h(\lambda)}{\lambda} = +\infty$
- $\frac{d^2 h}{d\,\lambda^2} \leq 0$ für alle $\lambda > 0$

Daraus folgt die Existenz eines eindeutig bestimmten Punktes λ_1, welcher folgende Eigenschaften hat: $0 < \lambda_1 < \infty$ und $h(\lambda_1) = 0$.
Aus der Definition von h sieht man, dass

$$(\lambda_1 \ \log(1+\alpha_1)\,, S_2', S_3', \dots, S_n') \ \in \ \Delta' \ \text{ und } \ r\big(\lambda_1 \, log(1+\alpha_1)\big) = \frac{1}{\lambda_1}$$

Daraus folgt, dass $\frac{dr}{dS_1} = 0$, wenn $r(S_1) = S_1^{-1}\log(1+\alpha_1)$. Da $\frac{d^2r}{dS_1^2} < 0$ und $S_1 = \lambda_1 \log(1+\alpha_1)$ folgt dass r an dieser Stelle sein Maximum annimmt:

$$r\big(\lambda_1(1+\alpha_1)\big) \ > \ r(S_1')$$

beziehungsweise in anderen Worten:

$$R(\lambda_1 \log(1+\alpha_1), S_2', S_3', \dots, S_n') \ > \ R(S_1', S_2', \dots, S_n' \,)$$

ii) für $0 < \epsilon < \ 1$ definiert man nun die Verteilungsfunktion $F_i^{(\epsilon)}$ wie folgt:

$$F_i^{(\epsilon)}(x) = (1-\epsilon)F_i(x) + \epsilon(1-\exp(-x^3))$$

Für ein fixes $S \in \Delta$ und eine genügend kleines ϵ ist $S \ \in \Delta^{(\epsilon)}$. Mit dem Satz über implizite Funktionen folgert man, dass $R^{(\epsilon)}(S)$ und $\lambda^{(\epsilon)}$ stetige Funktionen sind. Dann kann man nachweisen, dass für ein ϵ mit $0 < \epsilon < 1$ gilt: $R^{(\epsilon)}(S) \to R(S)$ und $\lambda^{*(\epsilon)} \to \ \lambda^*$ für $\epsilon \to 0^+$
Daraus erhält man folgende Ungleichung:

$$R(S) \ = \ \lim_{\epsilon\to 0^+} R^{(\epsilon)}\,(S) \ \le \ \lim_{\epsilon\to 0^+} \frac{1}{\lambda^{*(\epsilon)}} \ = \ \frac{1}{\lambda^*} \ = \ R(S^*) \qquad \square$$

Lemma 2

<u>Voraussetzungen</u>:

a) $\forall\ i, i = \{1,2,\dots,n\}$ *gibt es eine Folge von Wahrscheinlichkeits-Dichtefunktionen, die punktweiße gegen* $\frac{dF_i}{dx}$ *konvergieren*

b), c) *wie oben*

<u>Dann gilt:</u>

i) , ii) *wie oben*

<u>Kommentar:</u>

Im Lemma 2 wird die Voraussetzung a, von Satz 1 durch eine schwächere ersetzt.

4.2 R(S) unter verschiedenen Verteilungsfunktionen

In diesem Beispiel wird die Netto-Insolvenz-Konstante unter drei verschiedenen Voraussetzungen gezeichnet. Es wird nur ein einziges Risiko betrachtet. Die S-Achse wurde mit der Exponentialfunktion skaliert um die interessanten Aspekte der Funktion deutlich zu machen. Die gesamte Jahresprämie des Versicherers beträgt: *P = (1,15)*10*p* mit dem Poisson-Parameter p.
Es werden zwei verschiedene Verteilungen angenommen, wobei jede einen Mittelwert von 10 und eine Varianz von 25 aufweist. Graph eins und zwei sind nach der Exponential-Verteilung mit zwei Parameter verteilt.

$$\frac{dF}{dx} = \begin{cases} 0{,}2\ \exp\{-0{,}2\ (x-5)\} & für\ x \geq 5 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Diese Verteilung verhält sich sehr gut und man erzielt daher gute Ergebnisse damit. Im Gegensatz dazu steht die Pareto-Verteilung, welche bei Graph 3 verwendet wurde. Sie verhält sich so schlecht, dass sie gekürzt wurde, um die Existenz der Momenterzeugenden zu garantieren.

$$\frac{dF}{dx} = \begin{cases} \dfrac{3x^{-4}}{6{,}7^{-3} - 93{,}3^{-3}} & für\ x \leq 93{,}3 \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Außerdem werden die Rückversicherungsprämien auf zwei unterschiedlichen Arten berechnet. Die erste nennt sich ,,Expected Value Principle“. Dabei wird der Erwartungswert des Risikos mit dem Faktor $(1+\theta)$ multipliziert, wobei $\theta > 0$ einen Risikozuschlag darstellt. In diesem Beispiel lautet die Formel wie folgt:

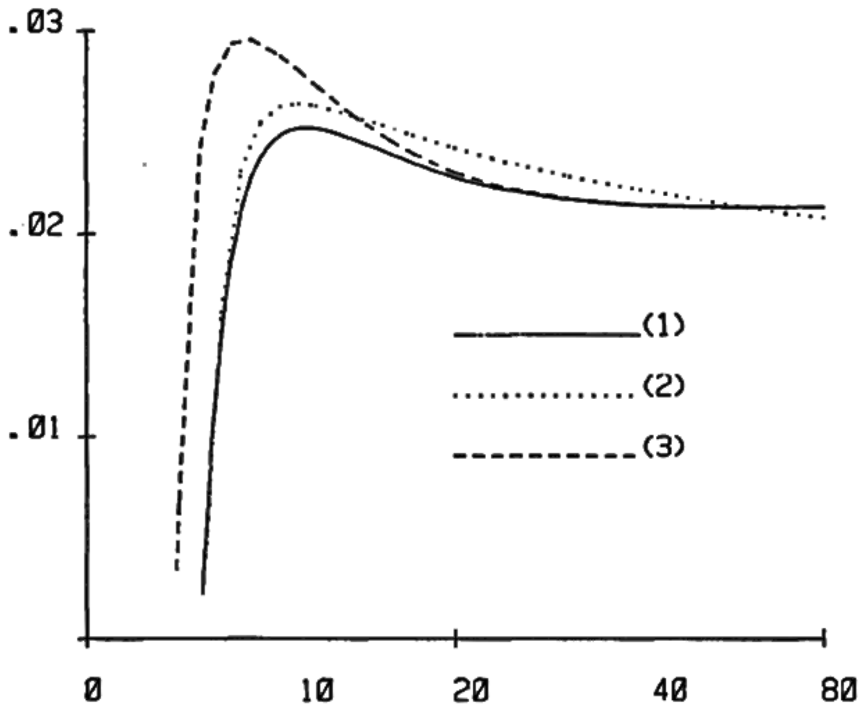
$$P(S) = (1+0{,}3) * p * \int_S^\infty (x-S)\ dF(x)$$

Das zweite Verfahren heißt ,,Exponential Principle“ und wird allgemein mit der Formel: $\frac{1}{\alpha}\ln * E[e^{\alpha X}]$ mit $\alpha > 0$ bezeichnet. Hier lautet sie:

$$P(S) = \frac{P}{A}\left[\left[\int_S^\infty \exp\{A(x-S)dF(x) + F(S) - 1\}\right]\right]$$

	Graph 1	**Graph 2**	**Graph 3**
Verteilung	Exponential	Pareto	Exponential
Berechnung der Rückversicherungsprämie	Expected Value Principle mit α gleich 30%	Expected Value Principle mit α gleich 30%	Exponential Principle mit Parameter A=0,0383
Maximum von R(M)	0,0252 bei M*=10,41	0,0264 bei M*=9,95	0,0296 bei M*=7,17

Abb. 4.1. R(S) unter verschiedenen Verteilungsfunktionen



Kommentar:

Trotz der unterschiedlichen Verteilungsfunktionen verhalten sich die ersten zwei Graphen sehr ähnlich. Bei der dritten Funktion wird das Maximum hingegen schon an einer viel früheren Stelle angenommen. Die Priorität liegt also tiefer und damit muss ein größerer Teil des Portfolios rückversichert werden, um die Wahrscheinlichkeit des Ruins zu minimieren.

5 Quoten-Rückversicherung

5.1 Das Maximum der Netto-Insolvenz-Konstante

Satz 3: Das Maximum von R(S)

Voraussetzungen:

P, F_i, G_i wie am Anfang gegeben

a) $P_i(a_i) \;=\; p_i\{\int_0^\infty \exp[A_i\,(1-a_i)x]\;dF_i(x) - 1\,\}\;/\;A_i$ für $A_i > 0,\; i = \{1,2,\dots n\}$

b) $\sum_{i=1}^{n} P_i\,(0) > P$

Dann gilt:

i) *Es gibt eindeutige Risikogrenzen* $(a_1^*, a_2^*, \dots\; a_n^*)$ *sodass:*

$$R(a_1^*, a_2^*, \dots\; a_n^*) = \;A_i\,\frac{(1-a_1^*)}{a_i^*}\;\textit{mit}\;\;0 \le a_i^* \le 1\,\textit{für}\;i = \{1,2,\dots,n\}$$

ii) *für alle Risikogrenzen* $(a_1, a_2, \dots, a_n) \;\neq\; (a_1^*, a_2^*, \dots\; a_n^*)$ *gilt:*

$$R(a_1, a_2, \dots, a_n) \;<\; R(a_1^*, a_2^*, \dots\; a_n^*)$$

iii) *R ist eine unimodale Funktion von* $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

Beweisskizze:

Man setzt $P_i(a_i)$ in die Gleichung der Definition von R ein. Dann differenziert man die Gleichung nach $a_i\;\; i = \{1,2,\dots,n\}$ und setzt das Ergebnis gleich 0. Dann löst man nach den a_i auf.

Kommentar:

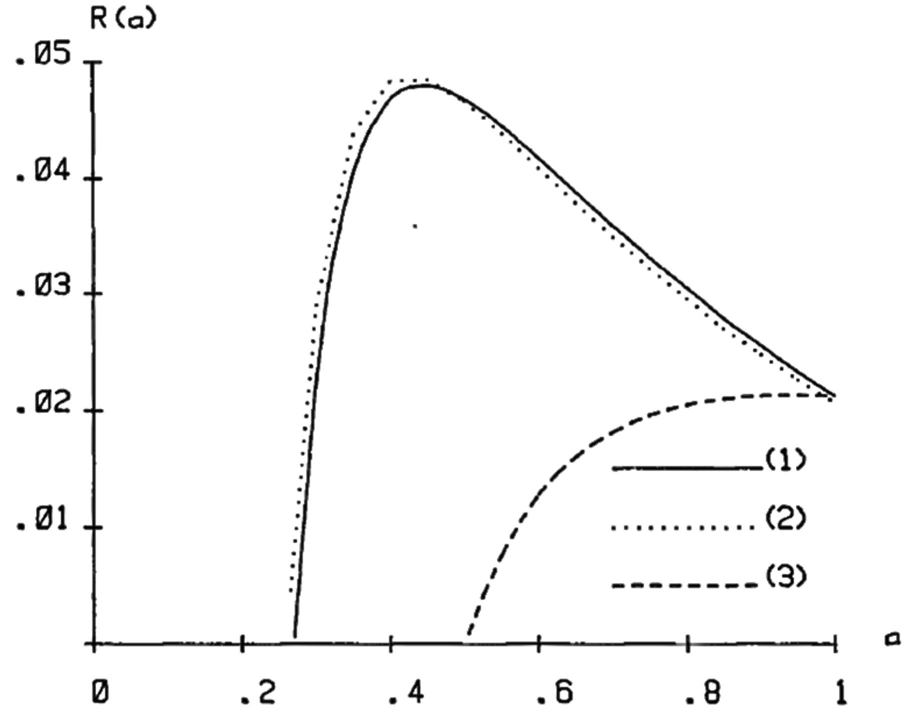
Die Voraussetzung a) ist analog zur Forderung b) aus dem ersten Ergebnis. Die Rückversicherungsprämie für das i-te Risiko muss nach dem exponential Prinzip mit dem Parameter A_i bestimmt werden. Wie man im untenstehenden Beispiel sehen wird, ist diese Voraussetzung nicht nötig um die Unimodalität der Funktion zu beweisen. Die wichtige Forderung ist b). Sie ist äquivalent zu c) aus Resultat 1 und besagt ebenfalls, dass der Versicherer keinen Gewinn machen darf, wenn er sein ganzen Portfolio rückversichert. Analog zum Resultat 1 sieht man, dass die Netto-Insolvenz-Konstante auch bei proportionaler Rückversicherung eine unimodale Funktion ist, dessen Maximum man leicht berechnen kann.

5.2 R(S) unter verschiedenen Verteilungsfunktionen

Wie im vorherigen Beispiel wird auch hier nur ein einziges Risiko betrachtet und es wird die Netto-Insolvenz-Konstante in Abhängigkeit von der Wahl der Risikolimits gewählt.

	Graph 1	**Graph 2**	**Graph 3**
Verteilungsfunktion	Exponential. mit zwei Parametern	Paretoverteilung	Exponential. mit zwei Parametern
Berechnung der Rückversicherungs-prämie	Exponential Prinzip mit Parameter 0,0383	Exponential Prinzip mit Parameter 0,036	Expected Value Prinzip mit α=30%
Maximum von R(a)	0,048 bei a*=0,444	0,0487 mit a*=0,425	0,0214 bei a*=0,947

Abb. 5.1. R(a) unter verschiedenen Verteilungsfunktionen



Kommentar:

Alle drei Graphen sind unimodal, wobei sich der dritte Fall stark von den ersten zwei unterscheidet. Aus den beiden Abbildungen lässt sich erkennen, dass bei festem Mittelwert und Varianz, die Netto-Insolvenz-Konstante wenig von der Verteilung abhängt. Die Berechnungsart der Prämie fließt stärker in die Konstante ein.

6 Eigenschaften von $R(\lambda)$
Für proportionaler und nicht-proportionaler Rückversicherung

Im Folgenden betrachten wir stets ein Portfolio mit nur zwei Risiken. Wie im vorherigen Teil kann man die Ergebnisse aber sehr einfach für alle $n > 2$ ausweiten. Die Ergebnisse gelten sowohl für proportionale als auch nichtproportionale Rückversicherung und es gibt keine Einschränkungen für die Wahl der Prämienberechnung. $R(\lambda_i)\ i = 1{,}2$ steht wieder für das Netto-Insolvenz-Konstante bezüglich eines einzigen Risikos, beziehungsweise für die positive Lösung der Gleichung

$$K_i(R) := p_i + R[\pi_i - P_i(\lambda_i)] - p_i\ G_i(R, \lambda_i) = 0$$

Wobei π_i die gesamte Jahresprämie des i-ten Risikos bezeichnet. $R(\lambda_1, \lambda_2)$ ist wie oberhalb, bezüglich zwei Risiken. Also die eindeutig positive Lösung von $K_1(R) + K_2(R) = 0$

6.1 Sätze

Lemma 4

Für feste λ_1 und λ_1 gilt:

$$\min\{R(\lambda_1), R(\lambda_2)\} \quad \leq \quad R(\lambda_1, \lambda_2) \quad \leq \quad \max\{R(\lambda_1), R(\lambda_2)\}$$

Beweis:

Ohne Verlust der Allgemeinheit nimmt man an, dass $0 < R(\lambda_1) \leq R(\lambda_2)$. Durch Berechnung von $K_i(0)$, $K_i'(0)$, $K_i''(R)$ und $\lim_{R\to\infty} K_i(R)$ folgt für *i =1,2*:

$$K_i(R) > 0 \ \ wenn\ 0 < R < R(\lambda_i), \quad K_i(R) < 0 \ \ wenn\ R > R(\lambda_i)$$

Nach Voraussetzung und da $K\big(R(\lambda_1)\big) = 0$ folgt:

$$K_1\big(R(\lambda_1)\big) + K_2\big(R(\lambda_1)\big) = K_2\big(R(\lambda_1)\big) \geq 0$$

Und da $R(\lambda_1) \leq R(\lambda_2)$:

$$K_1\big(R(\lambda_2)\big) + K_2\big(R(\lambda_2)\big) = K_1\big(R(\lambda_2)\big) \leq 0$$

$R(\lambda_1, \lambda_2)$ ist die eindeutig positive Lösung der Gleichung $K_1(R) + K_2(R) = 0$. □

Satz 5

Wenn R_i den größten Wert bei $\lambda_i = \lambda_i^*$ für $i = 1{,}2$ und $R(\lambda_1, \lambda_2)$ das Maximum bei $(\lambda_1, \lambda_2) = (\mathring{\lambda}_1, \mathring{\lambda}_2)$ erreicht dann gilt:

$$\min\{R(\lambda_1^*), R(\lambda_2^*)\} \quad \leq \quad R\big(\mathring{\lambda}_1, \mathring{\lambda}_2\big) \quad \leq \quad \max\{R(\lambda_1^*), R(\lambda_2^*)\}$$

Beweis:

Mit der Definition von $(\mathring{\lambda}_1, \mathring{\lambda}_2)$ und Lemma 4 folgt unmittelbar

$$\min\{R(\lambda_1^*), R(\lambda_2^*)\} \quad \leq \quad R(\lambda_1^*, \lambda_2^*) \quad \leq \quad R\big(\mathring{\lambda}_1, \mathring{\lambda}_2\big)$$

Dies beweist die erste Ungleichung. Der zweite Teil folgt mit der Definition von λ_i^*

$$R\big(\mathring{\lambda}_1, \mathring{\lambda}_2\big) \quad \leq \quad \max\big\{R\big(\mathring{\lambda}_1\big), R\big(\mathring{\lambda}_2\big)\big\} \quad \leq \quad \max\{R(\lambda_1^*), R(\lambda_2^*)\}$$ □

6.2 Ein Beispiel zur Veranschaulichung

a) Der Versicherer hat einen Quotenrückversicherungsvertrag. Das bedeutet, dass für alle Polizzen der gleiche Anteil rückversichert wird. Der Versicherer haftet wie üblich den Anteil *a*, der Rückversicherer zahlt *(1-a).*
b) Man betrachtet ein einziges Risiko.
c) Die jährlichen Forderungen für das Risiko sind mit 100 erwarteten Schadenfälle Poisson verteilt, wobei jede Polizze eine Gamma Verteilung aufweist:

$$\frac{dF}{dx} = \frac{x^{4^5} \exp\{-x * 5 * 10^{-4}\}}{\Gamma(5 * 5) * (2 * 10^3)^{5^5}} \quad f\ddot{u}r\ x \geq 0$$

Wobei der Mittelwert 11.000 und die Standard-Verteilung 4.690 beträgt.
d) Die jährlichen Bruttoprämien belaufen sich auf P = $2 * 10^6$. Eine Kostenanteil von k=0,35 ist nötig, dieser ist unabhängig von der speziellen Wahl der Rückversicherung.
e) Der Prämie für den Rückversicherer beträgt $P(1-a) = 2 * 10^6(1-a)$. Von dieser wird ein Faktor c=0,33 an den Versicherer für die Kommisionskosten bezahlt.

Die Netto-Prämie des Versicherers ist also $P\big(\,a - k + c(1-a)\big)$. Dies ist der Anteil a der Prämie, also die Nettoprämie des Versicherers, minus den Kostenanteil *k*, zuzüglich den Kommissionskosten *c* der Rückversicherungsprämie *(1-a).* Es wird angenommen, dass *c < k,* damit verhindert man, dass die Kosten für die Rückversicherung die erhaltenen Kommissionskosten übersteigen und somit der Versicherer einen Gewinn erzielt, wenn er das ganze Risiko rückversichert. Man will nun die Auswirkungen auf das Risiko betrachten, wenn man die Rückversicherungsgrenze a anders wählt. Dazu schreiben wir die Netto-Prämie um in: $\mathrm{P}\big(\mathrm{c} - \mathrm{k} + \mathrm{a}(1-\mathrm{c})\big)$. Für die Risikobemessung wird wie üblich die Netto-Insolvenz-Konstante genommen, also die einzig positive Lösung $:= R(a)$ von

$$p + R * P\big(c - k + a(1-c)\big) - p\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{R * a * x\}\ dF(x) = 0$$

Man will nun beobachten, wie sich die Netto-Insolvenz-Konstante in Abhängigkeit zum Risikolimit *a* verhält. Ist *a <0,1666,* so übersteigen die voraussichtlichen Netto-Forderungen das Netto-Einkommen. Ein Konkurs ist wahrscheinlich und somit ist die Netto-Insolvenz-Konstante *R = 0*. Übersteigt *a* diese Schranke, also $0{,}1666 \leq a \leq 1$, so verhält sich die Kurve von *R* wie die Graphen Eins und Zwei aus der zweiten Abbildung. *R(a)* ist folglich eine unimodale Funktion mit dem Maximum $4{,}66 * 10^{-5}$ an der Stelle *a = 0,32*. Bei der Rückversicherung des gesamten Versicherungsbestandes gilt $R(a = 1) = 2{,}46 * 10^{-5}$. Die Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Verlustes lässt sich also von $\exp\{-2{,}46 * 10^{-5} * U\}$ zu $\exp\{-4{,}66 * 10^{-5} * U\}$ reduzieren.

6.3 Beschaffenheit von R(S)

Für den restlichen Abschnitt bleibt die Bedeutung der Variablen *p, P, c, k ,F* erhalten und folgende Voraussetzungen werden getroffen: $c < k$ und $P(1-k) > p\int_0^\infty x\, dF(x)$. Die Netto-Insolvenz-Konstante ist durch die obige Gleichung: $p + R * P\big(c - k + a(1-c)\big) - p\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{R * a * x\}\ dF(x) = 0$ definiert.
Es existiert ein $L \in (0,1)$ sodass *R(a)* nur bei $a \in [0, L]$ den Wert Null annehmen kann. L ist also jener Wert, bei welchem die Netto-Prämie den Netto-Verpflichtungen entspricht.

Satz 6

Gilt folgende Ungleichung: $C > 1 - p\left[\int_0^\infty x * exp\{R(a=1) * x\}\ dF(x)\right] \backslash P$

So ist *R(a)* eine unimodale Funktion mit einem eindeutig bestimmten Maximum bei $a^* \in (L, 1)$.

Gilt die Ungleichung nicht, so ist *R(a)* eine monoton nicht-wachsende Funktion in $[L, 1]$

Beweis:

Mit dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass $R(a)$ eine stetige Funktion von $a \in [L, 1]$ und differenzierbar im Intervall $(L, 1)$ ist. Differenziert man nun die obige Gleichung:

$$p + R * P[c - k + a(1-c)] - p\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{R * a * x\}\ dF(x) = 0$$

Nach a: $0 + R * P\ (1-c) - p\left[\int_{-\infty}^{\infty} R * x * \exp\{R * a * x\}\ dF(x)\right]$

Dieser Term ist nur gleich Null, wenn $R = 0$ oder

$$c = 1 - p\left[\int_{-\infty}^{\infty} x * \exp\{R * a * x\}\ dF(x)\right] \backslash P$$

Diese implizite Darstellung der Proportionalität a gibt noch keine Auskunft über die Eindeutigkeit beziehungsweise über die Existenz. Differenziert man die ursprüngliche Gleichung jedoch zwei mal nach a und verwendet dafür die vorher berechnete Darstellung von c, so erhält man:

$$(1-p)\ \left[\int_{-\infty}^{\infty} R^2 x^2 \exp\{R * a * x\}\, dF(x)\right]$$

Die zweite Ableitung ist negativ also muss der Extremwert von $R(a)$für $a \in [L, 1]$ ein maximaler sein. Da $R(a) > 0$ für $a \in (L, 1]$ sieht man, dass R(a) entweder monoton nichtsteigend in für $[L, 1]$ oder unimodal mit einem eindeutig bestimmtem Maximum in für $a \in (L, 1)$. Welche dieser beiden Eigenschaften R(a) annimmt, hängt von der Beschaffenheit des Grenzwertes von $\frac{dR}{da}$ für $a \to 0$ und $a \to 1$. Dieser ist positiv oder Null im ersten und negativ im zweiten Fall. Aus der ursprünglichen Gleichung kann man den Grenzwert berechnen:

$$R^2 \left[p \int_0^\infty \exp\{R(a=1) * x\}\ dF(x) - P(1-c)\right] \backslash$$
$$\backslash \left[p \int_0^\infty 1 - \exp\{R(a=1) * x\} - x * R(a=1) * \exp\{R(a=1) * x\}\, dF(x)\}\right]$$

Da der Nenner immer negativ ist, folgt die Behauptung. □

7 Zusammenhang zur Nutzenfunktion des Überschusses

Die Insolvenz-Konstante hat einen starke Verbindung zur Nutzentheorie und der dort verwendeten exponentiellen Nutzenfunktion: $(x) = [1 - \exp\{-\lambda * x\}] \,/\, \lambda$. In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen Rückversicherungslimits die optimal im Sinne der vorherigen Abschnitte sind und den Rückversicherungslimits, welche den erwarteten Nutzen des Überschusses maximieren. Es wird mit der Excess of Loss Rückversicherung begonnen.

7.1 Nicht-Proportionale Rückversicherung

Satz 7

Voraussetzungen:

$\forall\, i, i = \{1,2,\dots,n\}$:

a) gibt es eine Folge von Dichtefunktionen die punktweiße gegen $\frac{dF_i}{dx}$ konvergiert

b) $P_i(S_i) = (1 + \alpha_i) * \int_{M_i}^{\infty} (x - S_i)\, dF_i(x)\ f\text{ür}\ \alpha > 0$

c) $\sum_{i=1}^{n} P_i\,(0) > P$

d)$F_i(x) < 1$ für $x < \infty$

Dann folgt:

Der Nutzen des Überschusses des Rückversicherers am Ende des Jahres ist maximal im Sinne der exponentiellen Nutzen-Funktion, wenn die XL-Rückversicherungslimits wie folgt definiert sind: $S_i = \lambda^{-1} \log(1 + \alpha_i)$

Kommentar:

Die Limits sind sehr ähnlich zu denen aus Satz 1. Der Unterschied liegt nur in der Wahl der λ. Diese wurden im ersten Abschnitt so gewählt, dass sie die Insolvenz-Konstante maximieren.

Beweis:

Im Folgenden wird *W* der anfängliche Überschuss und $B(.,S_1,S_2,\dots,S_n)$ die Verteilungsfunktion die gesamten jährlichen Forderungen darstellen.

$$E(S_1,S_2,\dots,S_n) = \int_0^{\infty} \lambda^{-1} \left[1 - \exp\left\{-\lambda\left(W + P - \sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)p_i \int_{S_i}^{\infty} x\, dF_i(x) + \right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)p_i * S_i * (1 - F_i(S_i)) - y\right)\right\}\right] dB(y,S_1,S_2,\dots,S_n)$$

Unter Verwendung der Eigenschaften der zusammengesetzten Poisson-Verteilung kann man dies umformen auf:

$$E(S_1,S_2,\dots,S_n) = \lambda^{-1} - \lambda^{-1} * \exp\left\{-\lambda\left(W + P - \sum_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)p_i \int_{S_i}^{\infty}(x - S_i) dF_i(x) + \right)\right\} *$$
$$exp\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i \int_0^{S_i} \exp\{\lambda y\}\, dF_i(y) + P_i * \exp\{\lambda S_i\}(1 - F_i(S_i))\right\}$$

Differenziert man $E(S_1,S_2,\dots,S_n)$ nach S_i so folgt die Behauptung □

7.2 Proportionale Rückversicherung

Satz 8

Voraussetzungen:

P, F_i, G_i wie am Anfang gegeben

a) $P_i(a_i) \;=\; p_i\{\int_0^\infty \exp[A_i\,(1-a_i)x]\;dF_i(x) - 1\,\}\;/\;A_i$ für $A_i > 0,\; i = \{1,2,\ldots n\}$

b) $\sum_{i=1}^{n} P_i\,(0) > P$

Dann folgt:

Der Nutzen des Überschusses des Rückversicherers am Ende des Jahres ist maximal im Sinne der exponentiellen Nutzen-Funktion, wenn die proportionalen Rückversicherungslimits wie folgt definiert sind: $a_i = A_i\,/\,(\lambda + A_i)$

Beweis:

Analog zum Satz 7

7 Zusammenfassung und Ausblick

Durch die Netto-Insolvenz-Konstante können die Rückversicherungsschranken so berechnet werden, dass sie das Risiko des Portfolios minimieren. Denn die zentralen Sätze der Arbeit, 1 und 3 haben bewiesen, dass bei einer bestimmten Wahl der Schranken die Netto-Insolvenz-Konstante maximiert wird und somit das Risiko minimal ist. Außerdem wurden verschiedene Eigenschaften der Netto-Insolvenz-Konstante präsentiert. Satz 6 zeigt, welche Voraussetzungen gelten müssen, damit ein eindeutiges Maximum existiert. Zum Abschluss wurden Zusammenhänge zur Nutzenfunktion gezeigt.

In dieser Arbeit werden nur zwei bestimmte Rückversicherungsarten betrachtet. In weiterer Folge wäre es interessant, ähnliche Sätze auch für die restlichen Arten, wie beispielsweise die Summenexzedenten, zu beweisen. Weiters werden in der Praxis mehrere Rückversicherungsverträge von verschiedensten Typen kombiniert. Die beste Kombination aus den Typen zu berechnen wäre demnach auch ein mögliches Thema zukünftiger Arbeiten.

8 Literaturverzeichnis

- M. Andreadakis and H. R. Waters (1980). The Effect of Reinsurance on the Degree of Risk Associated with an Insurer's Portfolio.
  ASTIN Bulletin, 11, S. 119-135

- H. R. Waters (1979). Excess of Loss Reinsurance Limits.
  Scandinavian Actuarial Journal, 1979, S. 37-43

- H. U. Gerber (1974). An Introduction to Mathematical Risk Theory.
  S. S. Huebner Foundation

9 Abbildungsverzeichnis