TECHNISCHE UNIVERSITÄT WIEN
Vienna University of Technology

Technische Universität Wien

Seminararbeit

On Constructing a Market Consistent Economic Scenario Generator

Betreuer:
Privatdoz. Dipl.-Ing. Dr.techn. Stefan Gerhold

Von:
Elisabeth Harlander

Juli 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Erst vor ein paar Jahren hat die Versicherungsbranche damit begonnen, die Wichtigkeit von ordnungsgemäßem Management von Optionen und Garantien in Versicherungsverträgen zu erkennen. Darüber hinaus werden Versicherer innerhalb der Europäischen Union ab dem 1. Jänner 2016 Gegenstand der *Solvency II* Richtlinie, die neue Anforderungen an Versicherungsunternehmen stellt. Unter anderem wird dadurch die Marktkonsistenz der Bewertung von Aktiva und Passiva gefordert. Ein Weg um das zu bewerkstelligen ist die Verwendung eines *ökonomischen Szenariogenerators* (ESG), der stochastische Szenarien für zukünftige Vermögensrenditen erstellt.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen Überblick über die Konstruktion eines ESG zu vermtitteln, der zur marktkonsistenten Bewertung von Garantien und Optionen in Versicherungsverträgen verwendet werden kann. Nach der Modellierung werden wir noch ein kurzes Bewertungsbeispiel betrachten, um die Auswirkungen von unterschiedlichen Investitionsproportionen in einem Portfolio auf die Bewertung eines Versicherungsvertrags mit jährlicher Zinsgarantie zu verdeutlichen.

Die Informationen für diese Arbeit basieren vorwiegend auf *On Constructing a Market Consistent Economic Secenario Generator* von *Ebba K. Baldvinsdòttir* und *Lina Palmborg* aus dem Jahr 2011.

Kapitel 2

Grundlegendes

Von Versicherungsunternehmen verkaufte Finanzprodukte enthalten oft Garantien und Optionen in zahlreichen Varianten, wie zum Beispiel garantierte Mindestzinssätze bei Lebensversicherungen. Allgemein betrachtet existieren zwei Typen von Garantien: *Maturitätsgarantien* und *Multi-periodische Garantien.*
Die Maturitätsgarantie sichert dem Versicherungsnehmer eine Mindestrendite, also die minimale Rendite, die man bei einer bestimmten Investition erhält, über die gesamte Haltedauer bis zum Ablauf der Vertrages.
Bei Multi-periodischen Garantien ist der Vertrag in mehrere Subperioden unterteilt und sichert eine verbindliche Garantie für jede dieser Subperioden, wodurch eine gute Rendite in einer früheren Periode in einer späteren mit geringerer Rendite nicht verloren geht.
Solche Garantien sind für Versicherungsnehmer sehr wertvoll, setzen aber das Versicherungsunternehmen einem beträchtlichen finanziellen Risiko aus.

Die Preisgestaltung und die Verwaltung von Garantien in Versicherungsverträgen ist heute eine der größten Herausforderungen von Versicherungsunternehmen. Solche Optionen und Garantien stellen Verpflichtungen für das Unternehmen dar, wirken sich auf deren Solvabilität aus und müssen deshalb ordnungsgemäß berechnet werden.

In der Vergangenheit wurde die ordnungsgemäße Berechnung von vielen Unternehmen aus bestimmten Gründen vernachlässigt. Zum einen galt der Wert der Optionen von Versicherungsverträgen im Vergleich zu den Kosten, die eine Bewertung mit sich bringen würde als vernachlässigbar, zum anderen benötigt die Bewertung der Polizzen oftmals komplexe analytische Methoden sowie eine starke Computerleistung.

2.1 Solvency II

Solvency II bezeichnet eine neue Gesetzgebung der Versicherungsaufsicht auf EU-Ebene, die nach mehreren Verschiebungen am 1. Jänner 2016 in Kraft treten wird. Dieses Regelwerk stellt neue Anforderungen an die Versicherungsunternehmen wie Eigenkapitalanforderungen, Risikomanagement und Transparenz.

Die Solvency II Rahmenbedingungen bestehen aus drei Säulen:
Säule I behandelt zwei Formen von Kapitalbedarf: Die *Mindestkapitalanforderung* (*MCR*) bestimmt das absolute Minimum an Kapital, das ein Versicherungsunternehmen haben muss und die *Zielsolvenzkapitalanforderung* (*SCR*) repräsentiert das Kapital, das ein Versicherungsunternehmen haben sollte. Das SCR kann entweder mit einer Standardformel oder einem vom Aufsichtsrat genehmigten internen Modell berechnet werden.
Säule II betrifft das Risikomanagementsystem und beinhaltet Regelungen zur Verwaltung und Beaufsichtigung von Risiken.
Säule III regelt die Transparenzbestimmungen, wie die Berichterstattungspflichten von Versicherungsunternehmen.

Um die Kapitalanforderungen eines Versicherungsunternehmens zu bestimmen, müssen zuerst die *versicherungstechnischen Rückstellungen* berechnet werden. Unter den versicherungstechnischen Rückstellungen versteht man den Betrag, den ein Versicherungsunternehmen haben muss, um die erwarteten zukünftigen Verpflichtungen aus Versicherungsverträgen zu decken. Aufgrund dieser Rückstellung bestimmt sich aufsichtsrechtlich, in welchem Umfang Kapitalanlagen zur Sicherung der Ansprüche der Versicherungsnehmer im Insolvenzfall gehalten werden müssen sowie die Eigenmittel, die ein Versicherer haben muss. Sie bilden bei Versicherungsunternehmen den überwiegenden Teil der Passivseite der Bilanz.

Versicherungstechnische Rückstellungen bestehen aus hedgebaren und nicht-hedgebaren Risiken. Unter hedgebaren Risiken versteht man solche, für die ein Marktwert besteht, bei nicht-hedgebaren Rsiken hingegen besteht *kein* Marktwert. Zu den nicht-hedgebaren Risiken zählen alle Rückstellungen für Spätschäden und potentiell mehrjährige Schadenabwicklungen.

2.1.1 Quantitative Impact Sutdies

Die *Europäische Aufsichtsbehörde für das Versicherungswesen und die betriebliche Altersversorgung* (*EIOPA*[1]; bis 2011 CEIOPS[2]) führt seit Dezember

[1]European Insurance and Occupational Pensions Authority
[2]Committee of European Insurance and Occupational Pensions Supervisors

2005 regelmäßig Untersuchungen zu den quantitativen Auswirkungen und der Durchführbarkeit von Solvency II durch. Diese sogenannten *Quantitative Impact Studies* (oder kurz *QIS*) dienen der Bestimmung der Höhe des benötigten Kapitals von Versicherungsunternehmen und beinhalten zusätzlich eine Beschreibung zur Berechnung der Eigenkapitalanforderungen.

2.2 Ziel und Anwendung

Die Bewertung von Versicherungsverträgen mit multi-periodischer minimaler Zinsgarantie verlangt nach komplexer Mathematik. Ein *ökonomischer Szenariogenerator* (*ESG*) dient als Werkzeug für diese Bewertung. Ein „Szenario“ bezeichnet in diesem Fall eine stochastisch generierte Simulation von einem Monte-Carlo gesteuerten Modell und dient somit als Schlüsselelement marktkonsistenter Bewertung von Geschäften der Lebensversicherung.

Die Konstruktion eines ESG erfordert eine Modellierung von Anlagen oder Anlagekategorien, gefolgt von der Kalibrierung eines Modells für jede einzelne Anlagekategorie. Wenn danach die Korrelation zwischen ihnen nachgewiesen ist, können die einzelnen Szenarien dafür erstellt werden.

Es gibt viele verschiedene Vermögenswerte die in einem ESG modelliert werden können; da ein Portfolio eines typischen Versicherungsunternehmens aus Bonds, Aktien und Immobilien besteht, wird sich diese Arbeit auf eine Modellierung für diese Anlagen beschränken.

Kapitel 3

Theoretischer Hintergrund

3.1 Der ökonomische Szenariogenerator

In der Versicherungsindustrie existieren zwei Typen von ESGs mit verschiedenen Anwendungsbereichen.
Bei *real world ESGs* stehen die tatsächlich erwarteten Verteilungen der Hauptrisikofaktoren zur Berechnung des SCR im Vordergrund. Diese Szenarien sollen die erwartete zukünftige Entwicklung der Wirtschaft von Versicherungsunternehmen, also - wie der Name sagt - die reale Welt reflektieren. Sie sollen die Risikoprämie enthalten und die Volatilitäten und Korrelationen stammen aus historischen Daten.
Marktkonsistente ESGs werden hingegen zur Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen für Versicherungsverträge mit Finanzoptionen und Garantien verwendet. Zentrale Annahmen von marktkonsistenten ESGs sind die Arbitragefreiheit[1], die Konsistenz der Szenarien und die Liquidität des Kapitalmarktes. Des Weiteren sind die Szenarien oft risikoneutral, das heißt ein Markkteilnehmer bevorzugt bei der Wahl verschiedener Alternativen gleichen Erwartungswerts weder die sicherere noch die unsicherere Alternative. Marktkonsistente Szenarien dienen im Vergleich zu den real world ESGs nicht dazu die reale Welt zu reflektieren, sondern der Berechnung von heutigen Marktpreisen.
Unter Marktkonsistenz versteht man die Fähigkeit des Modells, die Preise von gehandelten Assets zum Zeitpunkt $t = 0$ korrekt wiederzugeben.

Die Solvency II Richtlinie stellt einige Anforderungen an einen marktkonsistenten ESG. Es müssen Assetpreise generiert werden, die konsistent sind mit liquiden, tiefen und transparenten Finanzmärkten und es wird Arbitragefreiheit angenommen.

[1]Eine der Grundannahmen der Finanzmathematik: In gleichgewichteten Modellen werden die Preise in Abhängigkeit von den Angebots- und Nachfragemengen so lange angepasst, bis sich der Markt im Gleichgewicht befindet

Ein *liquider Markt* bedeutet, dass Anlagen einfach gekauft und verkauft werden können, ohne signifikante Preisänderungen hervorzurufen.
In einem *tiefen Markt* kann eine große Menge an Anlagen gehandelt werden, ohne dabei großen Einfluss auf die Preise der Finanzmärkte zu nehmen.
Transparenz in einem Markt bedeutet, dass gegenwärtige Handels- und Preisinformationen der Öffentlichkeit zugänglich sind.

Für die Bestimmung der passenden Volatilitäten gibt es zwei Näherungen, die *Betrachtung des Marktpreises von anderen Derivaten* und die *Analyse von historischen Volatilitäten.*
Die Absicht hinter marktkonsistenter Bewertung von Passiva ist die Reproduktion des Preises, um den Passiva gehandelt werden würden, wenn man sie tatsächlich auf dem Markt handeln wollte. Deshalb sollte der ESG Marktpreise von Anlagen mit ähnlichen Charakteristiken wie die bewerteten Verbindlichkeiten reproduzieren. Die Verbindlichkeiten von Versicherungsverträgen haben optionsähnliche Merkmale, also sollten auch Optionspreise reproduziert werden können.
Vorteile der Analyse von historischen Volatilitäten bestehen bei Assets, für die keine Optionspreise vorhanden sind (z.B. Immobilien), sowie bei längeren Maturitäten, für die Optionspreise nicht immer verfügbar sind.

Um Marktkonsistenz in einer „normalen" Marktsituation zu sichern, ist die Betrachtung der Marktpreise von anderen Derivaten geeigneter[2]. Es wird jedoch hervorgehoben, dass die Solvency II Richtlinie die Versicherungsunternehmen nicht auf nur eine Methode einschränken sollte und somit hängt die Wahl des Modells vom individuellen Unternehmen und dessen Absicht ab. Diese Arbeit wird sich allerdings, wenn möglich, auf die Methode der Bewertung von Optionspreisen fokussieren.

3.2 Überblick über die Modelle und Methoden

Der in dieser Arbeit beschriebene ESG beschränkt sich auf Modelle für drei Assetklassen: *Bonds*, *Aktien* und *Immobilien.*
Alle diese Assetklassen sind als stochastischer Prozess modelliert, der die *stochastische Differentialgleichung* (*SDE*) erfüllt:

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \qquad X(0) = x_0$$

wobei die Funktion μ als *Driftrate* bezeichnet wird, die Funktion σ *Diffusi-*

[2] Schlussfolgerung von QIS5, Annex G (fünfte Studie, 2010)

onskoeffizient heißt und $W(t)$ eine *Brownsche Bewegung*[3] ist.

Wie im vorigen Abschnitt besprochen, wird die Volatilität für jedes Modell nach Möglichkeit von Optionspreisen am Markt ermittelt.

Zinsmodelle basieren auf den Preisen von Swaptions, da diese dem Verhalten von Zinsratengarantien in Versicherungsverträgen ähneln. Eine *Swaption* gibt dem Halter das Recht, aber nicht die Verpflichtung, zu einem fixierten Zeitpunkt in einen Zinsswap einzutreten. Die Laufzeit und die Zinshöhe sind dabei festgelegt. Bei einem *Zinsswap* tauschen die Vertragspartner zu bestimmten Zeitpunkten Zinszahlungen auf festgelegte Nennbeträge aus. Die Zinszahlungen sind meist so festgesetzt, dass eine Partei bei Vertragsabschluss einen festgesetzten Zinssatz zahlt, die andere hingegen einen variablen Zinssatz. Zinsswaps werden sowohl zur Absicherung gegen Zinsänderungsrisiken als auch als Spekulationsinvestment genutzt.
Aktienmodelle basieren auf den Preisen von Aktienoptionen. Eine Aktien *Call* (*Put*) Option gibt dem Halter das Recht, aber nicht die Verpflichtung, ein festgelegte Menge eines Handelsgutes zu einem festgelegten Preis zum Fälligkeitszeitpunkt zu kaufen (verkaufen).
Für *Immobilienmodelle* verwendet man historische Daten, da meist keine Optionen am Markt vorhanden sind.

Die Korrelation zwischen Zinsraten und Aktien wird aus den Marktdaten berechnet, wohingegen die Korrelationen zwischen Zinsraten und Immobilien sowie zwischen Aktien und Immobilien aus historischen Daten stammen.

[3] Robert Brown, 1827

Kapitel 4

Modelle

4.1 Zinsmodelle

Zinsmodelle bilden das zentrale Element von ESGs, da die meisten ökonomischen und finanziellen Zeitreihen in einer Weise damit verbunden sind. Sie können grob in *Short Rate Modelle*, *Forward Rate Modelle* und *LIBOR Modelle* unterteilt werden.
Short Rate Modelle beschreiben die Dynamik des Momentanzinses (der Short Rate) r. Die Short Rate ist hierbei die erklärende Variable und damit die einzige Unsicherheitsquelle. Sie kann nicht am Markt beobachtet werden, ist also rein theoretischer Natur.
Die Forward Rate stellt die Short Rate zu einem zukünftigen Zeitpunkt dar. Hier wird die Zinsstrukturkurve als Ganzes modelliert.
LIBOR (*London Interbank Offered Rate*) Modelle gehören zu den Marktmodellen und sind eine Weiterentwicklung der Forward Rate Modelle. Sie verwenden statt fiktiven Forward Rates tatsächlich am Markt beobachtete Zinssätze zwischen den wichtigsten international tätigen Banken.

Zinsmodelle für ökonomische Szenarien müssen gewisse Eigenschaften erfüllen. Das Modell muss sowohl die gegenwärtige Zinskurve als Input verwenden als auch relativ simpel gehalten werden. Die Ein-Faktor Short Rate Modelle von *Hull-White*[1] und *Black-Karasinski*[2] erfüllen beide diese Voraussetzungen und sind somit ein beliebtes Werkzeug zur Modellierung der Zinsrate.

4.1.1 Hull-White Modelle

Das Hull-White Modell ist eine Erweiterung des Vasicek[3] Modells, bei dem die Parameter mit der Zeit variieren können. Deshalb kann das Modell der

[1] John C. Hull und Alan White, 1990
[2] Fischer Black und Piotr Karasinski, 1991
[3] Oldřich Vašíček, 1977

gegenwärtigen Laufzeitstruktur der Zinsrate exakt entsprechen.
Hull und White nahmen an, dass die Short Rate r normalverteilt ist:

$$dr(t) = [\theta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t), \qquad r(0) = r_0, \tag{4.1}$$

wobei r_0 eine positive Konstante ist, $\theta(t)$ die *deterministische Funktion der Zeit*, $a(t)$ der *Mittelwertrückkehrfaktor*, $\sigma(t)$ die *Volatilität der Short Rate* und $W(t)$ eine Brownsche Bewegung.

Setzt man nun in (4.1) $a(t) = a$ und $\sigma(t) = \sigma$, so erhält man das folgende Modell:

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t), \qquad r(0) = r_0,$$

wobei a und σ nun positive Konstanten sind und $\theta(t)$ so gewählt wird, dass das Modell exakt der gegenwärtigen Zinsstrukturkurve entspricht.
Es gilt

$$\theta(t) = \frac{\partial f^M(0,t)}{\partial T} + af^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}),$$

wobei $\frac{\partial f^M(0,t)}{\partial T}$ die partielle Ableitung von f^M bezüglich des zweiten Arguments und $f^M(0,t)$ die Forward-Rate zur Zeit 0 mit Maturität T ist, also

$$f^M(0,T) = -\frac{\partial \ln(P^M(0,T))}{\partial T},$$

wobei $P^M(0,T)$ der Preis eines Zero-Coupon Bonds mit Maturität T ist.

Der Preis eines Zero-Coupon Bonds zum Zeitpunkt t mit Maturität T ist gegeben durch:

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

mit

$$B(t,T) = \frac{1}{a}\left[1 - e^{-a(T-t)}\right],$$

$$A(t,T) = \frac{P^M(0,T)}{P^M(0,t)} exp\left[B(t,T)f^M(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t,T)^2\right].$$

Diese explizite Formel führt zu einer Formel für *Europäische Optionen*[4], was wiederum zu einer expliziten Formel für Swaptions führt.

[4] bei Europäischen Optionen ist der Fälligkeitszeitpunkt im Vorhinein bestimmt

Im Modell von Hull-White ist der Preis zur Zeit t von einem *Europäischen Call* mit Strike Preis K, Maturität T und Bond Maturität S gegeben durch

$$ZBC(t,T,S,K) = P(t,S)\phi(h) - KP(t,T)\phi(h-\sigma_p),$$

wobei

$$\sigma_p = \sigma\sqrt{\frac{1-e^{-2a(T-t)}}{2a}}B(T,S) \qquad h = \frac{1}{\sigma_p}ln\left(\frac{P(t,S)}{P(t,T)K}\right) + \frac{\sigma_p}{2}.$$

Der Preis zur Zeit t von einem *Europäischen Put* mit Strike Preis K, Maturität T und Bond Maturität S ist gegeben durch

$$ZBP(t,T,S,K) = KP(t,T)\phi(-h+\sigma_p) - P(t,S)\phi(-h).$$

Der Preis einer Payer Swaption mit Strike K, Maturität T und Nominalwert N ist gegeben durch:

$$PS(t,T,t_1,...,t_n,N,K) = N\sum_{i=1}^{n} c_i ZBP(t,T,t_i,K_i).$$

Der Nominalwert gibt dem Halter das Recht, zur Zeit T in einen Zinsswap mit Auszahlungszeitpunkten $t_1,...,t_n$, $t_1 > T$ einzutreten, wobei er den fixen Preis K zahlt und LIBOR erhält.

τ_i bezeichnet hierbei einen Bruchteil des Jahres von t_{i-1} bis t_i, $i = 1,...,n$ und $c_i = K\tau_i$ für $i = 1,...,n-1$ und $c_n = 1 + K\tau_n$.

Weiter gilt:

$$K_i = A(T,t_i)exp\left(-B(T,t_i)r^*\right),$$

wobei r^* der Wert der Spot Rate zum Zeitpunkt T ist, für den gilt

$$\sum_{i=1}^{n} c_i A(T,t_i)e^{-B(T,t_i)r^*} = 1.$$

Das Hull-White Modell hat den großen Vorteil, dass explizite Formeln für Zero-Coupon Bonds und Optionen bereits gegeben sind, wodurch die Modellierung erleichtert wird. Die normalverteilte Short Rate kann jedoch negative Zinsraten hervorrufen; unter normalen Marktkonditionen ist dieser Fall aber eher unwahrscheinlich.

4.1.2 Black-Karasinski Modelle

Das Black-Karasinski Ein-Faktor Modell nimmt eine logarithmische Normalverteilung für die Short Rate r an:

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - a\ln(r(t))]\,dt + \sigma dW(t), \qquad r(0) = r_0, \tag{4.2}$$

wobei r_0 eine positive Konstante, $\theta(t)$ die *deterministische Funktion der Zeit*, $a(t)$ der *Mittelwertrückkehrfaktor*, $\sigma(t)$ die *Volatilität* vom Logarithmus von $r(t)$ und $W(t)$ eine *Brownsche Bewegung* ist.

Durch Setzen von $a(t) = a$ und $\sigma(t) = \sigma$ in Formel (4.2) erhält man das folgende Modell:

$$d\ln(r(t)) = [\theta(t) - a\ln(r(t))]dt + \sigma dW(t), \qquad r(0) = r_0, \tag{4.3}$$

wobei $\theta(t)$ so gewählt wird, dass es der gegenwärtigen Marktstruktur entspricht.

Durch Verwendung des *Lemmas von Ito* und des Modells (4.3) erhält man:

$$dr(t) = r(t)\left[\theta(t) + \frac{\sigma^2}{2} - a\ln(r(t))\right]dt + \sigma r(t)dW(t),$$

was für alle $s \leq t$

$$r(t) = exp\left[\ln(r(s))e^{-a(t-s)} + \int_s^t e^{-a(t-u)}\theta(u)du + \sigma\int_s^t e^{-a(t-u)}dW(u)\right]$$

erfüllt. Durch setzen von

$$\alpha(t) = \ln(r_0)e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-u)}\theta du$$

erhält man

$$\lim_{t\mapsto\infty}\mathbb{E}\left[r(t)\right] = \exp\left[\lim_{t\mapsto\infty}\alpha(t) + \frac{\sigma^2}{4a}\right].$$

Im originalen Artikel zum logarithmisch normalverteilten Short Rate Modell von Black und Karasinski wird zur Implementierung die Verwendung von Binomialbäumen (Abbildung 4.1) empfohlen, in der Praxis werden aber häufiger Trinomialbäume (Abbildung 4.2) verwendet.

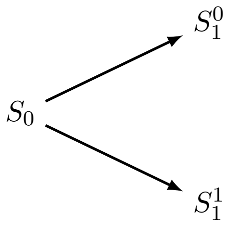

Abbildung 4.1: Beispiel für ein Binomialmodell: Für jeden Zeitschritt existieren *zwei* Entwicklungsmöglichkeiten

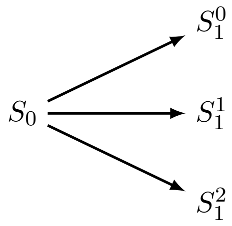

Abbildung 4.2: Beispiel für ein Trinomialmodell: Für jeden Zeitschritt existieren *drei* Entwicklungsmöglichkeiten

Im Gegensatz zum Modell von Hull und White können bei einer logarithmisch normalverteilten Short Rate die Zinsraten nicht negativ werden. Bei Black-Karasinski Modellen gibt es allerdings keine vorgegebenen analytischen Formeln für die Preise von Zero-Coupon Bonds und Bond Optionen, wodurch die Implementierung um einiges komplexer wird. Die Volatilität kann bei diesem Modell bei geringer Zinsrate viel zu hoch ausfallen; in einem solchen Fall kann die Verwendung von einem Multi-Faktor Short Rate Modell notwendig werden.

4.2 Aktienmodelle

Das logarithmisch normalverteilte *Black-Scholes*[5] Modell ist das am weitesten verbreitete Modell für Aktienabwicklungen. Hierbei folgt der Stock $S(t)$ einer *geometrischen Brownschen Bewegung*

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \qquad S(0) = S_0$$

mit konstenaten *Drift* μ, *Volatilität* σ und Brownscher Bewegung $W(t)$.
Der Preis einer Europäischen Call-Option mit Strike K und Maturität T kann durch die Black-Scholes Formel bestimmt werden:

$$\mathcal{O}(t,T,K) = S_0\Phi(d_1) - KP(t,T)\Phi(d_2),$$

wobei $\Phi(\cdot)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet, S_0 den gegenwärtigen Stockpreis und

$$d_{1,2} = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

[5] Fischer Black und Myron Samuel Scholes, 1973

Obwohl das Black-Scholes Modell annimmt, dass implizite Volatilitäten von Europäischen Optionen konstant und unabhängig vom Strike und der Maturität der Option sind, beschreibt es keine realistischen Aktienpreisdynamiken und ist auch nicht konsistent mit Optionspreisen am Markt.

Das Black-Scholes Modell geht von deterministischen Zinsraten aus, was in den meisten Fällen eine angemessene Vermutung ist, denn die Variabilität von Zinsraten ist üblicherweise geringer als die von Aktienrenditen. Für Optionen mit längeren Maturitäten sind allerdings stochastische Zinsraten signifikanter, weshalb man hier wieder auf die Zinsmodelle Hull-White und Black-Karasinski zurückgreifen kann.
Die Volatilität ist hierbei allerdings deterministisch und konstant und obwohl das nicht der optimale Weg zur Modellierung der Aktienvolatilität ist, würde ein komplexeres Modell mit stochastischer Volatilität und ebenso stochastischen Zinsraten den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

4.2.1 Aktienmodelle mit Hull-White Zinsraten

Stochastische Zinsraten mit einer Short Rate nach dem Hull-White Modell in ein Black-Scholes Modell einzubauen, wird durch die bereits vorgegebenen expliziten Formeln für Europäische Optionen erleichtert.
Unter der Voraussetzung eines Hull-White Modells mit *Mittelwertrückkehrfaktor* a, *Volatilität* σ_r, *Strike* K und *Asset* S mit *Yield* y ergibt sich folgende Formel für eine Europäische Call Option mit dem Preis zum Zeitpunkt t und *Maturität* T:

$$\mathcal{O}(t,T,K) = S(t)e^{-y(T-t)}\Phi(d_1) - KP(t,T)\Phi(d_2),$$

wobei

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{KP(t,T)}\right) - y(T-t) \pm \frac{1}{2}v^2(t,T)}{v(t,T)},$$

$$v^2(t,T) = V(t,T) + \sigma_s(T-t) + 2\rho_{r,S}\frac{\sigma_r}{\sigma_S}\left[T - t - \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)\right]$$

und wobei

$$V(t,T) = \frac{\sigma_r^2}{a^2}\left[T - t + \frac{2}{a}e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a}\right].$$

In dieser Formel bezeichnet $\rho_{r,S}$ die *Korrelation* zwischen den zwei Brownschen Bewegungen des Zinsmodells auf der einen Seite und des Aktienmodells auf der anderen, also

$$d\langle W_r, W_S\rangle := \rho dt$$

Die Korrelation ist ein endogener Parameter, der das Maß der Abhängigkeit zwischen zwei Faktoren beschreibt.

4.2.2 Aktienmodelle mit Black-Karasinski Zinsraten

Wie bereits diskutiert, existieren bei Black-Karasinski Modellen keine expliziten Formeln für Europäische Optionen. Aufgrund dessen benötigt man numerische Methoden, wodurch die Modellierung von Aktienderivaten um einiges aufwendiger wird.
Für Aktienoptionen benötigt man nicht nur *einen* Trinomialbaum (Abbildung 4.2) für die Zinsrate, sondern auch noch einen weiteren für die Stockpreise. Für diesen zweidimensionalen Trinomialbaum müssen zuerst die einzelnen Bäume erstellt und zusammengefügt werden, um die Korrelation zwischen der Zinsrate und dem Stockpreis zu ermitteln.

4.3 Immobilienmodelle

Liegenschaften gehören zu den gängigen Anlagen von Versicherungsunternehmen und Investitionen in Immobilien werden üblicherweise als Weg zur Diversifikation des Portfolios betrachtet. Die Modellierung von Immobilien unterscheidet sich allerdings von der Modellierung von Aktien und Bonds, da es keinen zentralen Marktplatz dafür gibt und die Transaktionen meist nur zwischen Privatparteien stattfinden. Das bedeutet, dass die Investment-Performance für diese Assetklasse kann nicht so einfach modelliert werden wie für Bonds und Stocks.
In den meisten Fällen kann man dafür einen Immobilienindex erstellen, basierend auf der Bewertung von individuellen Liegenschaften. Optionen sind auf einem Immobilienindex üblicherweise nicht vorhanden, darum müssen Immobilien mit historischen Volatilitäten vom Index modelliert werden.

Bei der Real world Modellierung besteht der Drift aus der Summe der *risikolosen Zinsrate* r_f und der *Risikoprämie* μ_P. Das bedeutet, dass das Black-Scholes Modell darstellbar ist als

$$dS(t) = (r_f + \mu_P)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \qquad S(0) = S_0,$$

wobei σ die konstante *Volatilität* bezeichnet, $S(t)$ den *Basiswert* und $W(t)$ eine *Brownsche Bewegung*.
Da das Ziel allerdings darin besteht, ein marktkonsistentes Immobilienmodell zu konstruieren, wird der Drift auf die risikolose Zinsrate gesetzt, obwohl die Volatilität aus historischen Daten stammt.

Der Immobilienindex ist glatter als der wahre Marktwert, weil er größtenteils von Schätzungen stammt und weniger von den Marktwerten. Um nun den echten Marktwert von auf Schätzungen basierenden Indizes zu bestimmen, werden *Entglättungmethoden* empfohlen.

4.3.1 Geglättetes Modell

Unter *Glättung* versteht man das Erstellen einer Funktion, die relevante Veränderungen der Datei bei Missachtung des Rauschens erfasst:

$$r_t^* = \omega_0 r_t + \omega(B) t_{t-1},$$

wobei r_t^* die inflationsbereinigte geglättete Indexrendite zur Zeit t ist, r_t der entsprechende tatsächliche Ertrag, ω_0 ein Gewicht zwischen 0 und 1 und $\omega(B)$ eine Polynomfunktion mit Lag Operator B:

$$\omega(B) = \omega_1 + \omega_2 B + \omega_3 B^2 + \dots$$

wobei sich B auf einen Lag ($Br_{t-1} = r_{t-2}$), B^2 auf zwei Lags usw. bezieht.

Das geglättete Modell lässt sich auch als ein *autoregressiver (AR) Prozess* darstellen:

$$r_t^* = \phi(B) r_{t-1}^* + \epsilon_t, \tag{4.4}$$

wobei $\phi(B)$ das Lag Operator Polynom bezeichnet und ϵ_t gegeben ist durch

$$\epsilon_t = \omega_0 r_t.$$

Glättung kann durch mehrere Faktoren erklärt werden. Bei den individuellen Immobilien ist der Schätzwert der Kostenvoranschlag vom Marktwert des Gutachters oder der Transaktionspreis zu einem speziellen Zeitpunkt. Der Gutachter kombiniert den letzten Schätzwert mit dem gewichteten Mittelelwert von gegenwärtigen Informationen und historischen Schätzungen. Währenddessen wird das Rauschen des Transaktionspreises herausgefiltert, also die systematische Komponente mit der Zeit geglättet.
Des Weiteren wird der Wert von unterschiedlichen Liegenschaften zu verschiedenen Zeitpunkten im Jahr geschätzt und die Ergebnisse werden gemittelt, um den Indexwert für das jeweilige Jahr zu erhalten.
Zum Schluss besteht ein Immobilienindex aus Schätzungen von verschiedenen Typen von Liegenschaften, die aggregiert werden um zusätzliche Glättung zu verursachen.

Geglättete Immobilienmodelle haben in der Regel eine geringere Volatilität und Korrelation mit Stockrenditen. Darum kann es bei Verwendung dieses

Modells zu einer Verzerrung der Vermögensaufteilung kommen, weil der diversifizierende Effekt von Immobilieninvestitionen überschätzt wird.

4.3.2 Entglättetes Modell

Nach der Glättung des Modells ist es möglich, den wahren, unbeobachteten Renditenwert durch invertieren des Modells zu bestimmen. Der resultierende entglättete Index ist eine historische Preisserie basierend auf dem publizierten Index, aber mit entfernter Glättung.
Man invertiert nun die Gleichung (4.4), um r_t als Funktion der vergangen und gegenwärtigen Werte von r_t^* darzustellen:

$$r_t = \frac{(r_t^* - \phi(B)r_{t-1}^*)}{\omega_0},$$

wobei der Autoregressive Parameter ϕ aus den beobachteten Daten von r_t^* bestimmt werden kann.

Um ω_0 zu ermitteln, benötigt man eine weitere Annahme über das Verhalten von r_t. Die hier gewählte Annahme besagt, dass die „wahre Volatilität“ von Immobilienrenditen von schätzungsbasierten Indizes in etwa der Hälfte der Volatilität von Börsenmarktrenditen entspricht:

$$\omega_0 = \frac{2SD(r_t^* - \phi r_{t-1}^*)}{\sigma^{StockMarket}},$$

wobei $SD(r_t^* - \phi r_{t-1}^*)$ an den historischen Renditen und an der empirischen Abschätzung von ϕ gemessen werden kann und $\sigma^{StockMarket}$ die jährliche Standardabweichung vom Börsenindex ist.

Wenn ϕ und ω_0 bestimmt wurden, können die wahren Renditen aus den Indexrenditen berechnet werden. Zum Schluss wird die Immobilienrendite für die risikolose Zinsrate korrigiert und die Immobilienvolatilität und die Korrelation zwischen Immobilien, Aktien und Zinsraten kann aus historischen Daten bestimmt werden.

4.4 Korrelation

Bei der Erstellung eines Finanzmodells von verschiedenen Assetklassen genügt es nicht, die Rendite und die Volatilität zu beschreiben. Es ist auch wichtig die Beziehung der Assets zueinander in dem Modell zu beschreiben. Dieses statistische Maß des Zusammenhangs zweier Zufallsvariablen bezeichnet man als Korrelation.

In der Finanzmathematik wird Korrelation am häufigsten dafür verwendet, um die Beziehung zweier Assets zueinander zu beschreiben. Die am häufigsten verwendete Formel für die Korrelation von zwei Zufallsvariablen X und Y ist die sogenannte *Pearson's Korrelation*:

$$\rho(X,Y) := \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}},$$

die $+1$ bei *perfekter positiver linearer Abhängigkeit* ist, -1 bei *perfekter negativer linearer Abhängigkeit* und 0 bei *Unkorreliertheit* der Variablen.

Die einfachste Methode zur Modellierung der Korrelation ist die Annahme, dass sie konstant ist. Das entspricht allerdings nicht der Realität und um dem entgegenzuwirken kann man für die Korrelation auch ein komplexeres Modell wählen, wie z.B. eine *Copula*.

4.5 Monte-Carlo Simulation

Nachdem alle Parameter für jedes Modell geschätzt wurden und die Korrelation zwischen den Assetklassen bestimmt wurde, können ökonomische Szenarien generiert werden. Die Untersuchung des Verhaltens eines Systems kann mithilfe der *Monte-Carlo Simulation* erfolgen. Diese statistische Methode generiert eine Stichprobe von Werten für unbestimmte Variablen, die dann in das Modell eingegliedert und zur Berechnung der Zielergebnisse verwendet werden.

Zur Simulation der Renditen von jedem Asset muss die stochastische Differentialgleichung diskretisiert werden. Die unkomplizierteste Diskretisierungsmethode ist die *Euler Approximation*[6]. Man betrachtet hierfür einen *Ito Prozess*, der die stochastische Differentialgleichung erfüllt:

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + b(t, X(t))dW(t)$$

und diskretisiert das Zeitintervall $[t_0, T]$ mit äquidistanten Zeitschritten $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < \cdots < \tau_N = T$.
Ein Euler Prozess ist also ein stochastischer Prozess Y, der das iterative Schema erfüllt:

$$Y_{n+1} = Y_n + a(\tau_n, Y_n)(\tau_{n+1} - \tau_n) + b(\tau_n, Y_n)(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}),$$

wobei $Y_n = Y(\tau_n)$ und $\Delta W_n = W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n}$ zufällige Inkremente der Brownschen Bewegung $W = \{W_t, t \geq 0\}$ sind. Diese Inkremente sind unabhängige

[6]Leonhard Euler, 1768

Gaußsche Zufallsvariablen[7] mit *Mittelwert*

$$E(\Delta W_n) = 0$$

und *Varianz*

$$E((\Delta W_n)^2) = \tau_{n+1} - \tau_n.$$

Wenn jede stochastische Differentialgleichung diskretisiert wurde, müssen ein passender Zeitschritt und eine Iterationsanzahl (N) gewählt werden. Für jeden Zeitschritt werden N Durchführungen einer Standard Gauß Verteilung generiert und mit $\sqrt{\tau_{n+1} - \tau_n}$ multipliziert, um die Verteilung von $(W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n})$ zu simulieren. Der simulierte Wert jeder Assetklasse muss dann zu jedem Zeitpunkt berechnet werden.

[7] Carl Friedrich Gauß

Kapitel 5

Bewertungsbeispiel

Nach diesem Einblick in die Modellierung der drei Assetklassen Bonds, Aktien und Immobilien im vorigen Kapitel, betrachten wir nun ein kurzes Beispiel mit berechneten *Netto-Cashflows* (*NCF*) eines Versicherungsvertrages mit jährlicher Zinsgarantie. Es wird dabei auch erkenntlich gemacht, wie verschiedene Assetportfolios mit unterschiedlicher garantierter Zinsrate den Wert verändern und auch Unterschiede zwischen den besprochenen Zinsmodellen werden ersichtlich.

Zur Vereinfachung berechnen wir den NCF eines einzigen Versicherungsvertrags mit jährlicher Zinsgarantie in Prozent. Der Versicherungsnehmer zahlt eine Prämie von 100 im Jahr 0. Dieses Geld wird in Aktien, Immobilien und Zero-Coupon Bonds mit Dauer von einem Jahr investiert. Zu Beginn jedes Jahres werden die Portfolioanteile angepasst, um die originale Proportion an Anlagen wiederherzustellen. Das Geld wird im Jahr 50 ausgezahlt.

Das bedeutet, dass das Geld im Jahr 0 in ein Portfolio investiert wird und am Ende jedes Jahres werden die erstellten Szenarien zum Vergleich der Renditen mit den Zinsgarantien verwendet.
Ist die Rendite *über* der Zinsgarantie, so erhält der Versicherungsnehmer den höheren Wert aus 90% der Rendite des Portfolios und der Zinsgarantie. Was übrig bleibt, geht an das Versicherungsunternehmen.
Wenn die Rendite *unter* der Zinsgarantie ist, muss das Versicherungsunternehmen die Differenz durch Kapitalzuführung ins Portfolio ausgleichen.
Der gegenwärtige Wert des NCF ist also die Differenz aus den Kapitalinjektionen und des Profits, den das Versicherungsunternehmen macht, wenn die Rendite über der Zinsrate liegt. Ein positiver NCF bedeutet deshalb in diesem Fall, dass die diskontierte Kapitalzufuhr höher als der diskontierte Gewinn ist.

Anteile				Hull-White	Black-Karasinski
Garantierte Zinsrate	Bonds	Aktien	Immobilien	Barwert der NCF	Barwert der NCF
0,03	0,90	0,05	0,05	7	4
0,03	0,70	0,20	0,10	74	82
0,03	0,50	0,30	0,20	174	192
0,04	0,90	0,05	0,05	34	34
0,04	0,70	0,20	0,10	122	133
0,04	0,50	0,30	0,20	251	275
0,05	0,90	0,05	0,05	81	85
0,05	0,70	0,20	0,10	194	208
0,05	0,50	0,30	0,20	361	392

Abbildung 5.1: Barwert des NCF für unterschiedliche Asset Portfolios und verschiedenen Zinsgarantien

Abbildung 5.1 zeigt den Wert des NCF von unterschiedlichen Portfolios und unterschiedlichen Zinsgarantien. Es ist erkennbar, dass bei steigender Investition in Aktien und Immobilien der Wert des NCF ebenfalls steigt. Der Grund dafür ist die höhere Instabilität der Rendite eines Portfolios mit größeren Anteilen an Aktien und Immobilien.
Der Verlust eines Versicherungsunternehmens bei Szenarien mit niedrigen Zinsraten ist weitaus höher gewichtet als der Gewinn bei höheren Zinsraten. Darum ist der NCF bei instabileren Portfolios höher als bei einem weniger instabilen Portfolio, obwohl die durchschnittlichen Renditen gleich sind.

Es zeichnen sich außerdem Unterschiede des NCF bei den beiden Zinsmodellen ab. Bei den Portfolios mit *weniger* Investitionen in Bonds (vor allem bei 70% und 50%) resultieren die Black-Karasinski Zinsraten in einem höheren NCF als die Hull-White Zinsraten. Das erklärt sich dadurch, dass Aktienmodelle unter Black-Karasinski Zinsraten eine höhere Volatilität aufweisen und bei Dominanz der Aktieninvestitionen steigt auch die Volatilität der Aktien.
Portfolios mit *mehr* Investitionen in Bonds (90%) zeichnet sich bei einer garantierten Rendit von 3% ein höherer NCF bei Hull-White ab, bei einer garantierten Rendite von 4% ist der NCF bei beiden Modellen gleich und bei 5% produziert Hull-White einen geringeren NCF als Black-Karasinski.

Dieses Beispiel soll zeigen, wie die Proportionen von drei Assetklassen im Portfolio eines Versicherungsunternehmens die Bewertung eines Versicherungsvertrags mit jährlicher Zinsgarantie beeinflusst. An den vorhandenen Werten lässt sich ablesen, dass das Portfolio mit dem geringsten Risiko für den Versicherer den größten Anteil des Kapitals in Bonds investiert, da somit der NCF am geringsten ist.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Schlussfolgerung

Die Konstruktion eines marktkonsistenten ökonomischen Szenariogenerators kann zur Bewertung von Versicherungsverpflichtungen herangezogen werden. Dafür haben wir in den vorigen Kapiteln verschieden Methoden zur Modellierung von Zinsraten, Aktien und Immobilien betrachtet. Das Hull-White Zinsmodell war einfacher zu modellieren, dank den vorgegeben analytischen Formeln für Bond- und Swaptionpreise. Das Black-Karasinski Modell hingegen verlangt nach der Verwendung von Trinomialbäumen, deren Erstellung eine hohe Rechenleistung erfordert.
Im Allgemeinen lässt sich dadurch aber keine Aussage machen, welches der Modelle die bessere Marktkonsistenz aufweist.

Als etwas simplere Alternative zu den beiden Modellen wurde für Aktienmodelle kurz das Black-Scholes Modell vorgestellt.
Die Modellierung von Immobilien erfolgte auf andere Weise wie die anderen Anlagekategorien. Grund dafür ist das Fehlen von Optionen auf Immobilien am Markt. Somit basiert dieses Modell auf historischen Renditen von einem Immobilienindex, der danach noch entglättet werden muss.

Die Marktkonsistenz von einem ESG zu sichern bietet einige Herausforderungen. Zuerst muss entschieden werden, ob die Bewertung von Optionspreisen oder die Analyse von historischen Volatilitäten für das Modell gewählt werden soll. Wichtig ist vor allem, dass der ESG Marktpreise mit ähnlichen Eigenschaften wie die bewerteten Anlagen reproduzieren kann.

Um den ESG noch zu verbessern, bieten sich Modelle an, die Inflation, Kreditrisiko und Wchselkurse mit einbeziehen. Auch Zwei-Faktor oder sogar Drei-Faktor Modelle können die Marktsituation besser erfassen als Ein-Faktor Modell. Trotz allem ändert sich der Fokus eines ESG für verschiedene Versicherungsunternehmen mit unterschiedlichen Verträgen.

Im Allgemeinen sollte ein marktkonsistenter ESG die Komplexität des Marktes und die Korrelationen der Assets zueinander erfassen können. Er soll außerdem simpel, transparent und robust sein und man sollte dabei auch nimmer gewährleisten, dass der Vorteil der Implementierung eines erweiterten Modells dessen erhöhte Komplexität überwiegt.