Seminararbeit

Finanz- und Versicherungsmathematik

Strategische Wertpapierveranlagung

Jakob Mostbeck

Februar 2016

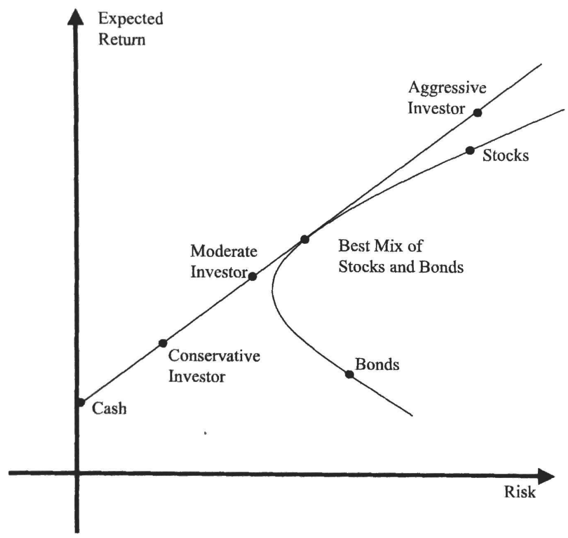
Technische Universität Wien

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Im Zuge dieser Arbeit wird die Wahl eines Portfolios für Kurzzeitinvestoren erklärt und des Weiteren auch die Spezialfälle, in denen Langzeitinvestoren die gleichen Entscheidungen treffen wie Kurzzeitinvestoren. In diesen besonderen Fällen ist der Investitionshorizont irrelevant, man sagt die Wahl des Portfolios ist kurzsichtig, weil Investoren nicht über die derzeitige Periode hinausdenken. In der gesamten Arbeit wird angenommen, dass Investoren über ein finanzielles Vermögen verfügen, aber kein Arbeitseinkommen haben.

Die Grundlage der Portfoliotheorie stützt auf die Analyse von Markowitz, die 1952 aufgestellt wurde. In dieser konnte Markowitz Aussagen über das Investitionsverhalten treffen indem er annahm, dass Anleger nur den Mittelwert, beziehungsweise die Standardabweichung, und die Varianz der Portfoliorendite während einer einzelnen Periode betrachteten.
Die Ergebnisse seiner Analyse können in folgender Grafik veranschaulicht werden. Dazu nimmt man den vereinfachten Fall mit 3 Wertpapieren an: Aktien, Fonds und Cash.



Auf der vertikalen Achse wird die erwartete Rendite gemessen, während die Horizontale das Risiko, gemessen durch die Standardabweichung beziehungsweise Varianz, anzeigt. Man kann erkennen dass Aktien zwar eine höhere erwartete Rendite haben aber auch

eine höhere Standardabweichung. Bei Fonds hingegen hat man eine niedrigeren Mittelwert und auch Standardabweichung. Cash hat auch eine niedrige erwartete Rendite, ist aber risikolos, das kann angenommen werden da nur eine kurze Periode betrachtet wird und dadurch das Inflationsrisiko so gering ist, das es außer Acht gelassen werden kann.
Die Menge aller verschieden Portfolios die auschließlich aus Aktien und Fonds bestehen, das bedeutet die Menge alle Kombinationen dieser beiden, werden in der Grafik durch die Kurve veranschaulicht.
Wenn man zu dem Portfolio Cash hinzufügt, ist die Menge Mittelwert-Standardabweichung die erreicht werden kann durch die Linie illustriert, die sogenannte *efficient frontier*, diese liefert zu gegeben Standardabweichung die höchste mittlere Rendite.

2 Kurzsichtige Portfoliowahl

2.1 Mittelwert-Varianz Analyse

2.1.1 Optimale Gewichtsverteilung für ein risikobehaftetes Wertpapier

Man betrachte folgendes klassische Problem der Porfolio Wahl: Für den Investor sind 2 Assets zur Zeit t verfügbar, eines ist risikolos, mit der einfachen Rendite $R_{f,t+1}$ für die Periode t bis $t+1$. Das andere risikobehaftet, mit der Rendite R_{t+1} und bedingten Mittelwert $E_t R_{t+1}$ und bedingte Varianz σ_t^2. Die Renditen werden mit einem Zeitindex versetzt, die das Datum beschreiben sollen, an welchem die Wertpapiere realisiert werden. Die risikolose Zinsrate wird zum Zeitpunkt $t+1$ realisiert,man kennt sie allerdings schon zum Zeitpunkt t. Der bedingte Mittelwert und bedingte Varianz sind bedingt durch die Information die der Investor zum Zeitpunkt t hat.
Der Investor gibt einen Anteil α_t von seinem Portfolio in das risikobehaftete Asset. Dann ist die Rendite des Portfolios:

$$R_{p,t+1} = \alpha_t R_{t+1} + (1-\alpha_t)R_{f,t+1} = R_{f,t+1} + \alpha_t(R_{t+1} - R_{f,t+1}) \tag{2.1}$$

Die erwartete Rendite des Portfolios ist $E_t R_{p,t+1} = R_{f,t+1} + \alpha_t(E_t R_{t+1} - R_{f,t+1})$ und die Varianz $\sigma_{pt}^2 = \alpha_t^2 \sigma_t^2$.
Der Investor bevorzugt einen hohen Mittelwert und gerine Varianz der Rendite des Portfolios. Ein Anleger will Mittelwert gegen Varianz linear tauschen,das bedeutet er strebt eine Maximierung der Linearkombination von Mittelwert und Varianz an, mit positiven Gewicht auf den Mittelwert und negativen Gewicht auf die Varianz:

$$\max_{\alpha_t}(E_t R_{p,t+1} - \frac{k}{2}\sigma_{pt}^2) \tag{2.2}$$

Setzt man im Mittelwert und Varianz der Rendite des Portfolios ein und subtrahiert $R_{f,t+1}$ (das ändert Maximierungsproblem nicht), kann das Maximierungsproblem umgeschrieben werden zu:

$$\max_{\alpha_t} \alpha_t(E_t R_{t+1} - R_{f,t+1}) - \frac{k}{2}\alpha_t^2\sigma_t^2 \tag{2.3}$$

Die Lösung des Maximierungsproblems ist:

$$\alpha_t = \frac{E_t R_{t+1} - R_{f,t+1}}{k\sigma_t^2} \tag{2.4}$$

Die Portfoliogewichtung im risikobehafteten Asset sollte gleich mit der erwarteten Überrendite sein, oder Risiko Prämie genannt, dividiert durch die bedingte Varianz mal dem Koeffizenten k, der die Aversion zur Varianz darstellen soll.
Ein nützliches Konzept in der Portfolio Analyse ist das Sharpe-Verhältnis S_t, eine Kennzahl die das Verhältnis von der mittleren Überrendite zur Standardabweichung zeigt:

$$S_t = \frac{E_t R_{t+1} - R_{f,t+1}}{\sigma_t} \tag{2.5}$$

Die Lösung des Maximierungsproblems kann umgeschrieben werden zu:

$$\alpha_t = \frac{S_t}{k\sigma_t} \tag{2.6}$$

Die mittlere Überrendite von einem Portfolio ist $\frac{S_t^2}{k}$ und die Varianz vom Portfolio ist $\frac{S_t^2}{k^2}$, folglich das Verhältnis von Mittelwert zur Varianz gleich $\frac{1}{k}$. Die Standardabweichung des Portfolios ist $\frac{S_t}{k}$, und somit die Sharpe-Verhältnis gleich S_t. In diesem einfachen Modell haben alle Portfolios dasselbe Sharpe-Verhältnis, weil alle das gleiche risikobehaftete Wertpapier (mit größerem bzw kleineren Anteil)haben.

2.1.2 Mittelwert-Varianz Analyse mit mehereren risikobehafteten Wertpapieren

Die Resultate lassen sich trivialerweise auf den Fall mit mehreren risikobehafteten Assets fortsetzen. Dazu definiert man die Rendite in gleicher Art und Weise wie vorher, außer das fettgedruckten Buchstaben Vektoren beziehungsweise Matritzen beschreiben. Demnach ist $\mathbf{R}_{t+1}$ ein Vektor von risikobehafteten Renditen mit N Elementen, $E_t\mathbf{R}_{t+1}$ der Mittelwertvektor und $\mathbf{\Sigma}_t$ die Varianz-Kovarianzmatrix . $\boldsymbol{\alpha}_t$ ist der Vektor der Gewichtungen von den risikobehafteten Wertpapieren. Dadurch kann das Maximierungsproblem wiefolgt dargestellt werden:

$$\max_{\boldsymbol{\alpha}_t} \boldsymbol{\alpha}_t^{'}(E_t\mathbf{R}_{t+1} - R_{f,t+1}\boldsymbol{\iota}) - \frac{k}{2}\boldsymbol{\alpha}_t^{'}\mathbf{\Sigma}_t\boldsymbol{\alpha}_t \tag{2.7}$$

$\boldsymbol{\iota}$ ist ein Vektor mit einsen und $(E_t\mathbf{R}_{t+1} - R_{f,t+1}\boldsymbol{\iota})$ ist der Vektor der Überrenditen von N risikobehafteten Wertpapieren, die den risikofreien Zinsatz übersteigen. Die Varianz der Portfolio Rendite ist $\boldsymbol{\alpha}_t^{'}\mathbf{\Sigma}_t\boldsymbol{\alpha}_t$.

Die Lösung des Maximierungsproblems ist nun:

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \frac{1}{k}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}(E_t\mathbf{R}_{t+1} - R_{f,t+1}\boldsymbol{\iota}) \tag{2.8}$$

Das ist die Verallgemeinerung der Lösung mit nur einem risikobehafteten Wertpapier. Die einzelne Überrendite wird durch einen Vektor mit Einträgen von den Überrenditen und der Kehrwert der Varianz wird durch $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$, die Inverse der Varianz-Kovarianz Matrix der Rendite ersetzt.

Die Wünsche des Investors werden in der Lösung nur durch den Term $\frac{1}{k}$ beschrieben. Die Unterschiede zwischen den Investoren liegt in der Gewichtung in die risikobehafteten Wertpapiere, aber nicht in der Gewichtung der einzelnen risikobehafteten Wertpapieren. Konservative Anleger, mit einem hohen k, halten mehr von dem risikolosen Wertpapier und weniger von den risikobehafteten Assets, aber sie ändern nicht das relative Verhältnis zwischen den risikobehafteten Wertpapieren, das durch den Vektor $\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}(E_t\mathbf{R}_{t+1} - R_{f,t+1}\boldsymbol{\iota})$ beschrieben werden.

2.2 Nutzenfunktion

2.2.1 Grundlage der Nutzenfunktionstheorie

Bis jetzt hatte man angenommen, dass Investoren nur die Varianz und den Mittelwert der Portfoliorendite betrachten. Mit der Annahme dass ein Anleger eine Nutzenfunktion hat, die sein Vermögen am Ende einer Periode misst, erhält man ähnliche Ergebnisse. In diesem Fall definieren wir das Maximierungsproblem neu:

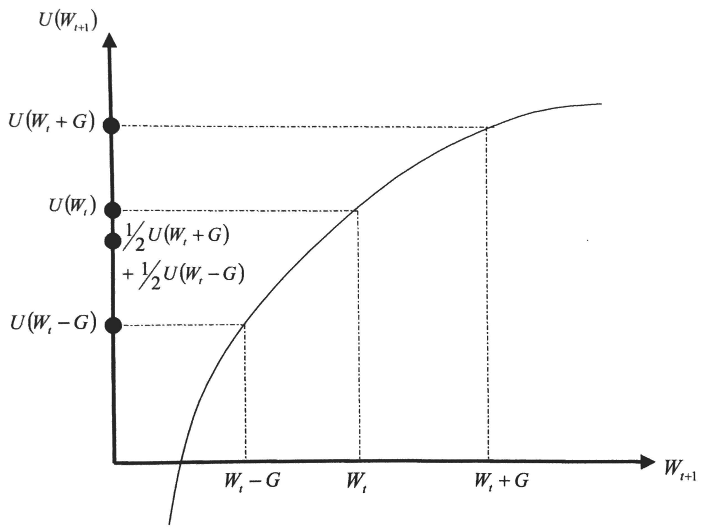
$$\max E_t U(W_{t+1}) \tag{2.9}$$

mit

$$W_{t+1} = (1 + R_{p,t+1})W_t \tag{2.10}$$

$U(W_{t+1})$ ist die konkave standard Nutzenfunktion, dargestellt in Abbildung 2.2.1. Die Krümmung der Nutzenfunktion impliziert, dass der Investor risikoscheu ist.
Um das zu verdeutlichen betrachte man folgendes Beispiel: Einem Investor mit Anfangsvermögen W_t wird ein gefährliches Spiel angeboten, entweder bekommt er einen Betrag G zu seinem Vermögen addiert beziehungsweise subtrahiert mit jeweils der gleichen Ein-

trittswahrscheinlichkeit. Lehnt der Anleger das Spiel ab so ist sein Vermögen sicher und der Nutzen $U(W_t)$. Spielt er so wächst sein Vermögen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ um G, also ist sein Vermögen ist $W_t + G$, aber mit gleicher Wahrscheinlichkeit verliert er und sein Vermögen wird auf $W_t - G$ fallen. Der erwartete Nutzen ist $\frac{1}{2}U(W_t + G) + \frac{1}{2}U(W_t - G)$, der durch die Krümmung der Nutzenfunktion weniger als $U(W_t)$ ist. Dadurch wird der Anleger das Spiel ablehnen,weil es nur Risiko bietet und keine absehbaren Gewinn, und ist damit unattraktiv für einen risikoaversen Investor. Der Grad der Krümmung von der



Nutzenfunktion zeigt die Intensität der Risiko-Aversion des Investors. Die Krümmung kann unter Rücksichtnahme der Vermögenswerte durch die 2. Ableitung der Nutzenfunktion bestimmt werden, nachdem sie durch die 1. Ableitung dividert wurde, um jegliche Abhängigkeit der Kurvenänderungen durch willkürliche Einheiten zu eliminieren
Der Koeffizient der absoluten Risiko-Aversion ist definiert als:

$$A(W) := -\frac{U''(W)}{U'(W)} \tag{2.11}$$

und der Koeffizient der relative Risiko-Aversion ist definiert als:

$$R(W) := WA(W) = -\frac{WU''(W)}{U'(W)} \tag{2.12}$$

Der Kehrwert dieser Maße wird als *absolute und relative Risikotoleranz* bezeichnet.

2.2.2 Formen der Nutzenfunktion

Für ein lenkbares Modell für die Wahl eines Portfolios benötigt man Annahmen über die Form der Nutzenfunktion, und gegebenenfalls Verteilungsannahmen an die Renditen. Mit 3 verschieden Nutzenfunktionen und Annahmen über die Verteilung der Renditen erhält man einfache Ergebnisse, die konsitent mit denen der Mittelwert-Varianz Analyse sind:

- **quadratische Nutzenfunktion**. In diesem Fall ist $U(W_{t+1}) = a + bW_{t+1}$. Unter dieser Annahme ist die Lösung des Maximierungsproblem eine Linearkombination von Mittelwert und Varianz. Es müssen keine Verteilungsvorraussetzungen an die Renditen gestellt werden. Die quadratische Nutzenfunktion impliziert dass die absolute und relative Risiko-Aversion mit dem Vermögen wachsen.

- **exponentiale Nutzenfunktion**. $U(W_{t+1}) = -\exp(-\theta W_{t+1})$ und es wird angenommen dass die Renditen normal verteilt. Diese Nutzenfunktion impliziert dass die absolute Risiko-Aversion eine Konstante ist,nämlich θ,während die Relative mit dem Vermögen steigt.

- **Potenznutzenfunktion**.In diesem Fall gilt $U(W_{t+1}) = (W_{t+1}^{1-\gamma} - 1)/(1-\gamma)$ und die Renditen werden als Lognormal-verteilt angenommen. Diese Nutzenfunktion impliziert,dass die absolute Risiko-Aversion mit steigendem Wohlhaben abnimmt, während die relative Risiko-Aversion eine Konstante ist,nämlich γ.Wenn im Limes γ gegen 1 geht wird die Potenznutzenfunktion zu einer logarithmischen Nutzenfunktion: $U(W_{t+1}) = \log(W_{t+1})$

Aufgrund der eben besprochenen Eigenschaften der verschieden Nutzenfunktionen, werden die exponentielle Nutzenfunktion und die Potenznutzenfunktion der Quadratischen vorgezogen. Die Eigenschaft der Potenznutzenfunktion, dass die relative Risiko-Aversion eine Konstante ist, macht sie besonders interessant und wird daher der exponentiellen Nutzenfunktion vorgezogen.

Die Verteilungsannahmen der Renditen wird durch die Wahl zwischen Potenznutzenfunktion und exponentialler Nutzenfunktion bestimmt. Die Exponentiale erzeugt einfache Resultate, wenn die Renditen normalverteilt sind, während die Potenznutzenfunktion ebenso einfache Ergebnisse erzeugt, wenn die Renditen Lognormalverteilt sind.

2.3 Ein lognormales Modell mit Potenznutzenfunktion

Man kann nun Resultate für die Wahl eines Porfolios unter der Annahme dass Anleger eine Potenznutzenfunktion haben und dass die Renditen Lognormalverteilt sind entwickeln. Dazu benötigt man eine wichtige Eigenschaft von lognormal-verteilten Zufallsvariablen:

$$\log E_t X_{t+1} = E_t \log X_{t+1} + \frac{1}{2}\text{Var}_{\ t} \log X_{t+1} = E_t x_{t+1} + \frac{1}{2}\sigma^2_{xt} \tag{2.13}$$

Mit der Notation log ist der natürliche Logarithmus gemeint.
Mit der Potenznutzenfunktion kann die Gleichung (2.9) umgeschrieben werden:

$$\max E_t W_{t+1}^{1-\gamma}/(1-\gamma) \tag{2.14}$$

Die Maximierung dieses Erwartungswerts ist äquivalent zur Maximierung vom Logarithmus der Erwartung, und der Skalar $1/(1-\gamma)$ kann vernachlässigt werden da er die Lösung nicht verändert. Mit der Annahme dass die Renditen lognormal verteilt sind, folgt dass die Vermögenswerte in der nächsten Periode lognormal sind, und (2.13) kann umgeschrieben werden zu:

$$\max \log E_t W_{t+1}^{1-\gamma} = (1-\gamma) E_t w_{t+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma)^2 \sigma^2_{wt} \tag{2.15}$$

Die Bugdetrestriktion (2.10) kann ebenso in log From umgeschrieben werden:

$$w_{t+1} = r_{p,t+1} + w_t \tag{2.16}$$

wobei $r_{p,t+1} = \log(1 + R_{p,t+1})$ die logarithmische Rendite des Portfolios ist.
Dividiert man (2.15) durch $(1-\gamma)$ und benutzt (2.16) formulieren wir das Problem um:

$$\max E_t r_{p,t+1} + \frac{1}{2}(1-\gamma)\sigma^2_{pt} \tag{2.17}$$

mit σ^2_{pt} die bedingte Varianz von der logarithmischen Rendite des Portfolios.
Um die Gleichung zu verstehen, ist es nützlich zu notieren dass:

$$E_t r_{p,t+1} + \frac{\sigma^2_{pt}}{2} = \log E_t(1 + R_{p,t+1}) \tag{2.18}$$

das gilt, weil die Portfoliorendite lognormal ist. Man kann (2.17) nochmal umschreiben zu:

$$\max \log E_t(1 + R_{p,t+1}) - \frac{1}{2}\gamma\sigma_{pt}^2 \tag{2.19}$$

Wie in der Mittelwert-Varianz Analyse, tauscht der Investor Mittelwert gegen Varianz. Die relevante Rendite ist die eichfache Rendite und nicht die logarithmische Rendite. Der Investor tauscht den logarithmischen Mittelwert linear gegen die Varianz von der logarithmischen Rendite. Der Koeffizient von der relativen Risiko-Aversion γ hat dieselbe Rolle wie der Parameter k in der Mittelwert-Varianz Analyse.
Die Gleichung (2.17) zeigt den Fall $\gamma = 1$, der eine spezielle Rolle in der Analyse hat. Wenn $\gamma = 1$ ist,dann hat der Investor eine logaritmische Nutzenfunktion und wählt das Portfolio mit der höchstmöglichen logarithmischen Rendite (das ist manchmal unter dem Namen "optimales Wachstum Portfolio" bekannt). Wenn $\gamma > 1$ ist, dann sucht der Anleger ein sichereres Portfolio, indem er die Varianz der logarithmischen Rendite vermindert. Wenn $\gamma < 1$ dann sucht der Investor ein risikoreicheres Portfolio,das eine höhere Varianz hat. Der Fall $\gamma = 1$ ist genau die Grenze wo sich die beiden Betrachtungen gegenseitig aufheben.

2.3.1 Aprroximation der Portfoliorendite

Der nächste wichtige Schritt ist es eine Verknüpfung zwischen den logarithmischen Renditen, der zugrundeliegenden Assets, und der logarithmischen Portfoliorendite zu finden. Dazu betrachtet man den einfachen Fall mit 2 Wertpapieren, ein risikoloses und ein risikobehaftetes. Die einfache Portfoliorendite (2.1) ist eine Linearkombination von den einfachen Renditen der 2 Wertpapieren. Die logarithmische Rendite des Portfolios ist der Logarithmus dieser Linearkombination, welches nicht das selbe wie die Linearkombination der logarithmischen Renditen ist.
Bei kurzen Zeitintervallen können wir die Taylor-Approximation von nichtlinearen Funktionen auf die individuellen log Renditen verwenden um auf die logarithmische Rendite des Portfolios zu kommen. Das führt zu:

$$r_{p,t+1} - r_{f,t+1} = \alpha_t(r_{t+1} - r_{f,t+1}) + \frac{1}{2}\alpha_t(1 - \alpha_t)\sigma_t^2 \tag{2.20}$$

Der Unterschied zwischen der logarithmischen Portfoliorendite und der Linearkombination von individuellen log Renditen ist durch den Term $\alpha_t(1 - \alpha_t)\sigma_t^2/2$ gegeben. Er

verschwindet wenn die Gewichtung auf das risikobehaftete Wertpapier im Portfolio gleich 0 ist, dann ist die logarithmische Portfoliorendite einfach die risikolose logarithmische Rendite, oder wenn die Gewichtung 1 ist, dann ist die Rendite einfach die riskobehaftete logarithmische Rendite.
Wenn $0 < \alpha_t < 1$ gilt, ist das Portfolio gewichtet und der Term $\alpha_t(1-\alpha_t)\sigma_t^2/2$ ist positiv.
Die Approximation in (2.20) kann stark verbessert werden indem man immer kleinere Intervalle betrachtet.
Eine wichtige Eigenschaft der approximativen Portfoliorendite ist,dass es die Möglichkeit der Insolvenz ausgeschlossen wird, selbst wenn der Investor eine Short-Position ($\alpha_t < 0$), oder kreditgestütze Position in dem risikobehafteten Wertpapier ($\alpha_t > 1$) hält. Die logarithmische Portfoliorendite ist immer endlich, unabhängig von den Renditen der zugrundeliegenden Assets, dadurch kann nie das ganze Vermögen verbraucht werden. In vielen Fällen ist es vertretbar, die Möglichkeit der Insolvenz auszuschließen, jedoch nicht wenn dadurch die Wahl des optimalen Portfolios zu einer hohen Fremdkapitalaufnahme führt.
Die Approximation (2.20) lässt sich auf den Fall mit mehreren risikobehafteten Wertpapieren fortsetzen, die gemeinsam lognormal verteilt sind mit bedingter Varianz-Kovarianz Matrix $\mathbf{\Sigma}_t$. $\boldsymbol{\sigma}_t^2$ bezeichnet den Vektor der die Diagonale der Matrix $\mathbf{\Sigma}_t$,also die Varianzen der Renditen, enthält. Die Annäherung des Portfolio Returns wird zu:

$$r_{p,t+1} - r_{f,t+1} = \boldsymbol{\alpha}_t^{'}(r_{t+1} - r_{f,t+1}\boldsymbol{\iota}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_t^{'}\boldsymbol{\sigma}_t^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_t^{'}\mathbf{\Sigma}_t\boldsymbol{\alpha}_t \tag{2.21}$$

2.3.2 Lösung des Modells

In einem 2-Asset Modell impliziert die Gleichung (2.20) dass der Mittelwert der Überrendite des Portfolios gleich $E_t r_{p,t+1} - r_{f,t+1} = \alpha_t(E_t r_{t+1} - r_{f,t+1}) + \frac{1}{2}\alpha_t(1-\alpha_t)\sigma_t^2$ ist, während die Varianz der Portfolio Rendite $\alpha_t^2\sigma_t^2$ ist. Setzt man das in die objektive Funktion (2.17) ein, so wird das Problem zu:

$$\max \alpha_t(E_t r_{t+1} - r_{f,t+1}) + \frac{1}{2}\alpha_t(1-\alpha_t)\sigma_t^2 + \frac{1}{2}(1-\gamma)\alpha_t^2\sigma_t^2 \tag{2.22}$$

die Lösung ist:

$$\alpha_t = \frac{E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_t^2}{2}}{\gamma\sigma_t^2} \tag{2.23}$$

In einem lognormalen Model mit Potenznutzenfunktion ist die Gleichung äquivalent zur Mittelwert-Varianz Lösung (2.4). Der Zähler der Lösung ist die erwartete logaritmische Überrendite addiert mit der Hälfte der Varianz des risikobehafteten Wertpapieres, um von log Renditen auf einfache zu kommen, die letztendlich die sind die für den Investor von Belangen sind. (Die Formel für der Erwartung von lognormalen Zufallsvariablen ergibt dass $E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \sigma_t^2/2 = \log E_t(1 + R_{t+1})/(1 + R_{ft})$.) Der Nenner der Lösung ist der Koeffizient der relativen Risiko-Aversion mal der Varianz der risikobehafteten Rendite. Somit ist die optimlale Portfolio Gewichtung, genauso wie im Mittelwert-Varianz Modell, die Risiko Prämie dividiert durch die Risiko-Aversion mal der Varianz.
In einem Model mit einigen risikobehafteten Wertpapieren ist der Vektor der Lösungen für die optimale Gewichtung gleich:

$$\boldsymbol{\alpha}_t = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}(E_t\mathbf{r}_{t+1} - r_{f,t+1}\boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{\sigma}_t^2/2) \tag{2.24}$$

Diese Lösung ist äquivalent Mittelwert-Varianz Lösung (2.8) für meherere risikobehaftete Wertpapiere. Wie in der Mittelwert-Varianz Lösung, hat diese die Eigenschaft,dass der Koeffizient der relativen Risiko-Aversion nur die Gewichtung auf die risikobehafteten Wertpapiere bestimmt, aber nicht die Gewichtung der einzelnen Assets.

3 Kurzsichtige Wahl eines Langzeitportfolios

3.1 Potenznutzenfunktion

Bei der kurzsichtigen Portfoliowahl betrachtet man eine kurze Investitionszeit und nimmt an dass der Investor sich außschließlich um die Verteilung der Vermögenswerte in dieser Periode kümmert. Das entspricht aber nicht immer ganz der Realität, denn es gibt Investoren die längerfristig anlegen wollen. Daher kann man alternativ annehmen, dass ein Investor nun die Verteilung der Vermögenswerte nach K Perioden betrachtet, dann ist die Nutzenfunktion statt $U(W_{t+1})$, $U(W_{t+K})$. Außerdem wird angenommen, dass alle Vermögenswerte wieder investiert werden, sodass die Budgetrestriktion die Form:

$$W_{t+K} = (1 + R_{pK,t+K})W_t = (1 + R_{p,t+1})(1 + R_{p,t+2}) \dots (1 + R_{p,t+K})W_t \tag{3.1}$$

hat. Die Notation $(1 + R_{pK,t+K})$ beschreibt, dass die Portfoliorendite über K Perioden gemessen wird, von t bis $t + K$. Diese K-Perioden Rendite ist einfach das Produkt von K aufeinanderfolgenden 1-Perioden Renditen. Diese ist eine kumulative Rendite, daher muss man um die eine jährliche Rendite zu berechnen die K-te Wurzel ziehen, die $(K/4)$-te Wurzel wenn man eine vierteljährige Rendite berechnen möchte, die (K/S)-te Wurzel wenn die S-tel jährliche berechnet werden soll. Nimmt man den Logarithmus, so ist die kumulative logaritmische Rendite über K Perioden die Summe von K 1-Perioden Renditen:

$$r_{pK,t+K} = r_{p,t+1} + \cdots + r_{p,t+K} \tag{3.2}$$

Die jährliche logarithmische Rendite kann errechnet werden indem man durch (K/S) dividiert, falls es S Basisperioden im Jahr gibt.
Das optimale Portfolio eines Langzeitinvestoren hängt nicht nur von der Objektivität ab, sondern auch davon inwiefern seine Handlungsmöglichkeiten in den einzelnen Perioden eingeschränkt sind. Im Allgemeinen bedeutet das, ob der Anleger von Periode zu Periode sein Portfolio neu gewichten darf oder ob er nur zu einem vorher bestimmten Zeitpunkt t sein Portfolio gewichtet, ohne der Möglichkeit im Zeitraum t bis $t + K$ die zugrundeliegenden Wertpapiere zu realisieren.

3.1.1 Kurzsichtige Portfoliowahl ohne Rebalancierung

Zuerst nimmt man an, dass eine Neugewichtung im Zeitraum t bis $t + K$ nicht möglich ist, sodass ein Langzeitinvestor die K-Perioden Rendite in gleicher Art und Weise berechnet wie eine 1-Perioden Rendite. Desweiteren nehmen wir an, dass ein Anleger ein Potenznutzenfunktion hat und dass die Renditen lognormal verteilt sind. Zur Vereinfachung betrachtet man wieder den Fall mit einem einzelen risikobehafteten Wertpapier. Eine weitere höchst einschränkende Annahme wird gebraucht und zwar dass alle Renditen unabhängig und identisch verteilt (iid) sind. Das impliziert, dass der risikofreie logarithmische Zinssatz r_f und die risikolose logarithmische K-Perioden Rendite Kr_f Konstanten sind. Des Weitern sind auch der Mittelwert der logarithmischen Rendite Er und der Mittelwert der logarithmischen K-Perioden Rendite des risikobehafteten Wertpapiers KEr Konstanten. Die Varianz der log Rendite des risikobehafteten Wertpapiers σ^2 ist ebenso eine Konstante und die Renditen sind unkorreliert, somit ist die Varianz der log K-Perioden Rendite des risikobehaften Assets genau $K\sigma^2$:

$$\text{Var } r_{K,t+K} = \text{Var } r_{t+1} + \cdots + \text{Var } r_{t+K} = K\sigma^2 \tag{3.3}$$

Die erste Gleichheit folgt dadurch dass die Renditen unkorreliert sind, die 2. Gleichheit durch die konstante Varianz der risikobehafteten Rendite.
Mit unabhängig und identisch verteilten Renditen ist die Zuordnung von logarithmischen ein-Perioden Renditen zu logarithmischen K-Perioden Renditen trivial. Alle Mittelwerte und Varianzen der einzelnen Wertpapiere werden durch den gleichen Faktor K skaliert. Wenn man dieselbe Approximation (2.20) auf die zugehörigen Renditen der Wertpapiere anwenden kann um auf die Rendite des Portfolios zu kommen, impliziert das, dass das zuletzt gewählte Kurzeitportfolio immer noch optimal für eine Langezeitanleger ist. Intuitiv ergibt sich das optimale Portfoliogewicht eines risikobehafteten Wertpapiers durch den Mittelwert der logarthmischen Überrendite plus der Hälfte der logarithmischen Varianz,um den logarithmischen Mittelwert zu einem einfachen zu konvertieren, dividiert durch die Risiko-Aversion mal der Varianz. Wenn man den Mittelwert und die Varianz mit K multipliziert, ändert sich die Lösung nicht. Dieses Argument kann leicht zu dem Fall mit mehreren risikobehafteten Wertpapieren erweitert werden. Sowohl der Langzeitinvestor als auch der Kurzzeitinvestor erhalten dasselbe Mittelwert-Varianz Diagramm, mit dem Unterschied dass es rauf oder runter skaliert wird mit dem Faktor K, dadurch wählen sie denselben Punkt auf dem Diagramm und dadurch dasselbe Portfolio.
Die Schwachstelle in dieser Analyse ist die Annahme, dass die Budgetbeschränkung

(2.20) für einen langen Investitionszeitraum zutrifft. Die Budgetrestriktion ist eine genaue Approximation in kurzen Zeitintervallen, aber die Qualität der Approximation verschlechtert sich wenn es auf lange Halteperioden angewendet wird. Aus diesem Grund beinhaltet die Lösung der Wahl eines Langzeitportfolios, ohne der Möglichkeiten zu rebalancieren, einige Horizont Effekte, auch dann wenn die risikobehafteten Rendite identisch und unabhängig verteilt sind.

3.1.2 Kurzsichtige Portfoliowahl mit Rebalancierung

Die Annahme dass die Möglichkeit der Rebalancierung für einen Langzeitinvestor nicht gegeben ist, scheint oberflächlich betrachtet ideal, da das Langzeitproblem formal gesehen analog dem Kurzzeitproblem betrachtet werden kann. Unglücklicherweise entsteht ein technisches Problem, da der Nuzten der loglinearen Budgetbeschränkung (2.20) entkräftet wird. In anderen Worten, die Annahme beschreibt nicht die Realität. Langzeitanleger haben die Möglichkeit zu jeder Zeit Wertpapiere zu realisieren. Es gibt keine typische Beziehung zwischen dem Investitionszeitraum und der Häufigkeit der Rebalancierung. Dementsprechend nehmen wir an, dass ein Anleger in jeder Periode sein Portfolio gewichten kann.
Samuelson(1969) und Merton (1969,1971) haben 2 Möglichkeiten hergeleitet, in denen ein Langzeitinvestor kurzsichtig handelt und dasselbe Portfolio wählt wie ein Kurzzeitanleger.
Die 1. Möglichkeit, in der die Portfoliowahl kurzsichtig ist, ist wenn der Investor eine Potenznutzenfunktion hat und die Renditen unabhängig und identisch verteilt sind(iid). Wir leiten dieses Ergebnis intuitiv her.
Wenn Renditen unabhängig und identisch (iid) verteilt sind, dann erhält man zwischen den einzelnen Perioden keine neue Information, somit gibt es keinen Grund seine Portfoliowahl zu ändern. Somit beschränkt man sich auf deterministische Portfolioregeln in denen das Gewicht des risikobehafteten Wertpapiers α_t von der Zeit abhängt. Außerdem ist die K-Perioden-Rendite lognormal verteilt, falls die einzelnen 1-Perioden-Renditen lognormal und iid verteilt sind. Der Investor, mit Potenznutzenfunktion, wählt sein Portfolio somit aufgrund des Mittelwerts und der Varianz der logarithmischen K-Perioden Portfoliorendite.
Diese K-Perioden Rendite ist die Summe der einzelen logarithmischen 1-Perioden Ren-

diten. Zur Vereinfachung wählen wir $K = 2$,somit können wir schreiben:

$$\begin{aligned} r_{p2,t+2} - 2r_f &= (r_{p,t+1} - r_f) + (r_{p,t+2} - r_f) \\ &= \alpha_t(r_{t+1} - r_f) + \frac{1}{2}\alpha_t(1-\alpha_t)\sigma^2 \\ &\quad + \alpha_{t+1}(r_{t+2} - r_f) + \frac{1}{2}\alpha_{t+1}(1-\alpha_{t+1})\sigma^2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei α_t und α_{t+1} unterschiedlich sein können, da der Inverstor die Möglichkeit hat jede Periode zu rebalancieren. Die bedingte Varianz der logarithmischen 2-Perioden Rendite ist:

$$\text{Var }_t(r_{p,t,t+2}) = (\alpha_t^2 + \alpha_{t+1}^2)\sigma^2 \tag{3.5}$$

da α_t und α_{t+1} deterministisch sind, sind sie auch schon zum Zeitpunkt t bekannt. Der Mittelwert der logarithmischen 2-Perioden Rendite, angepasst durch die Hälfte der Varianz von der 2-Perioden Rendite, ist:

$$E_t(r_{p,t,t+2}) + \frac{1}{2}\text{Var }_t(r_{p,t,t+2}) = 2r_f + (\alpha_t + \alpha_{t+1})(Er - r_f + \sigma^2/2) \tag{3.6}$$

Das Ziel eines 2-Perioden Investors mit Potenznutzenfunktion kann wie folgt beschrieben werden:

$$\max E_t(r_{p,t,t+2}) + \frac{1}{2}\text{Var }_t(r_{p,t,t+2}) - \frac{1}{\gamma}\text{Var }_t(r_{p,t,t+2}) \tag{3.7}$$

Ein Anleger mit $\gamma > 0$ bevorzugt immer eine geringere Varianz der logarithmischen Renditen für einen gegebenen Varianz-adjustieren Mittelwert. Aber von der Gleichung (3.6) erkennt man, dass der Varianz-adjustierte Mittelwert nur von der Summe $(\alpha_t + \alpha_{t+1})$ abhängt. Der Anleger kann diese Summe festlegen und die Gewichte α_t und α_{t+1} anpassen, um die Varianz zu minimieren. Das Problem, der Abhängigkeit der Varianz von der Summe der Quadtrate $(\alpha_t^2 + \alpha_{t+1}^2)$, kann bewerkstelligt werden, indem man $\alpha_t = \alpha_{t+1}$ setzt, die Regel des konstanten Portfolios.

Dadurch dass die Gewichtung konstant ist, balanciert der Investor in keiner Periode das Portfolio und handelt somit wie ein Kurzzeitanleger.

Dieses Argument für kurzsichtige Portfoliowahl lässt sich trivialerweise für eine beliebig lange Portfoliolaufzeit K fortsetzten.

Die 2. Samuelson-Merton Bedingung für kurzsichtige Portfoliowahl ist dass der Investor eine logarithmische Nutzenfunktion hat. In diesem Fall ist die Portfoliowahl kurzsichtig, auch wenn die Renditen der Wertpapiere nicht identisch und unabhängig verteilt sind. Das Argument hier ist relativ simpel: Man betrachte dass der Investor ein Portfolio auswählt das die erwartete logarithmische Rendite maximiert. Gleichung (3.2) zeigt dass die logarithmische k-Perioden Rendite genau die Summe der 1-Perioden Renditen ist. Nachdem das Portfolio jede einzelne Periode neu gewichtet werden kann, wird die Summe maximiert indem man die einzelnen Elemente der Summe maximiert. Das ist genau der Fall wenn man in jeder einzelen Periode das optimale 1-Perioden-Portfolio wählt.

3.2 Potennutzenfunktion definiert durch den Verbrauch

Die Annahme dass ein Investor nur um den Wohlstand eines einzelnen Zeitraums besorgt ist, ist analytisch vorteilhaft, empirisch aber zweifelhaft. Die meisten Anleger,seien es zum Beispiel einzelne Personen die für die Pension sparen, kümmern sich nicht ausschließlich um die Höhe des Vermögens sondern um die Lebensqualität die sie dadurch erreichen können.
Daher nimmt man alternativ an, dass der Nutzen durch den persönlichen Bedarf definiert ist. Mit dieser Annahme spielt die Zeit beziehungsweise die Investitionszeit eine geringere Rolle in dieser Analyse, natürlich legt es den Endtermin fest und die Bedingungen zu den zwischenzeitlichen Punkten sind wichtig. Wenn der Endzeitpunkt sehr weit in der Zukunft liegt, bestimmen die zwischenzeitlichen Bedingungen die Lösung. Der effektive Investitionshorizont kann variiert werden indem man den zeitlichen Diskontierungsfaktor, der die relative Gewichte des Investors in der nahen beziehungsweise fernen Zukunft bestimmt, verändert.
Dazu nimmt man an dass ein Anleger eine zeitabhängige Potenznutzenfunktion hat , die durch den Konsum beschrieben wird:

$$\max E_t \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i U(C_{t+i}) = E_t \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i \frac{C_{t+i}^{1-\gamma}}{1-\gamma} \tag{3.8}$$

Hier ist δ der zeitliche Abzinsungsfaktor, wenn δ groß ist legt der Investor relativ viel Gewicht auf die ferne Zukunft. Mit sinkendem δ wird mehr und mehr auf die nahe Zukunft gewichtet, wenn mit dem Limes δ gegen 0 geht, handelt ein Anleger wir ein 1-Perioden Investor. Der Anleger ist mit der intertemporale Budgetrestriktion konfrontiert, das bedeutet, dass das Vermögen in der nächsten Periode gleich der Rendite des Portfolios mal dem investierten Vermögen entspricht. Das investierte Vermögen ist der Teil der nicht verbraucht wurde:

$$W_{t+1} = (1 + R_{p,t+1})(W_t - C_t) \tag{3.9}$$

Diese objektive Funktion und die Budgetbeschränkung implizieren die folgende Bedingung 1. Ordnung oder auch *Euler Gleichung* für die optimale Wahl des Bedarfs:

$$U^{'}(C_t) = E_t[\delta U^{'}(C_{t+1})(1 + R_{i,t+1})] \tag{3.10}$$

wobei $(1 + R_{i,t+1})$ jede mögliche Rendite beschreibt, zum Beispiel die risikolose $(1 + R_{f,t+1})$,die risikobehaftete $(1 + R_{t+1})$, oder die Portfolio Rendite $(1 + R_{p,t+1})$. Man kann die Gleichung (3.10) durch $U^{'}(C_t)$ dividieren und die Bedingung der Potenznutzenfunktion,das $U^{'}(C_t) = C_t^{-\gamma}$ gilt, ausnutzen um es umzuschreiben zu:

$$1 = E_t\left[\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}(1 + R_{i,t+1})\right] \tag{3.11}$$

In dem Fall dass die Rendite risikolos ist $(R_{i,t+1} = R_{f,t+1})$, ist diese schon zur Zeit t bekannt und kann aus dem Erwartungswert gezogen werden:

$$\frac{1}{(1 + R_{f,t})} = E_t\left[\delta\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{-\gamma}\right] \tag{3.12}$$

Der Term $\delta(C_{t+1}/C_t)^{-\gamma}$ der hier auftaucht, ist der sogenannte "stoachstische Diskontierungsfaktor" oder SDF, der genutzt werden kann um erwartete Ausgleichszahlungen jedes beliebigen Wertpapiers zu diskontieren, um dessen Preis zu finden. Der Verbrauch jedes Investors, der frei auf dem Finanzmarkt handelt, kann als SDF benutzt werden.

3.2.1 Ein lognormales Verbrauchsmodell

Nun nimmt man an dass die Renditen der Wertpapiere und der Verbrauch gemeinsam lognormal verteilt sind, um mit loglinearen Versionen der Gleichungen zu arbeiten. Hansen und Singleton (1983) waren Pioniere dieser Methode. Die logarithmische Gleichung der risikolosen Euler Gleichung (3.12) ist gegeben durch:

$$E_t[\Delta c_{t+1}] = \frac{\log \delta}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} r_{f,t+1} + \frac{\gamma}{2} \sigma_{ct}^2 \tag{3.13}$$

Die 3 Terme auf der rechten Seite der Gleichung entsprechen 3 Arten mit dem Bedarf umzugehen. Der 1.,ein geduldiger Anleger mit hohen Zeitdiskontierungsfaktor δ ist grundsätzlich gewillt seinen Verbrauch zu verschieben. Der 2.,ein hoher Zinssatz gibt dem Investor einen Ansporn seinen Verbrauch zu verschieben. Den Verbrauch zu verschieben bedeutet diesen anzusparen und in der Zukunft mehr zu verbrauchen. Die Bereitwilligkeit des Investors den Verbrauch im Bezug auf seine Bedürfnisse zu verringern nennt man die Anpassungsfähikeit zur intertemporalen Substitution(EIS). In einem Model mit Potenznutzenfunktion ist die EIS gleich dem Kehrwert der Risiko-Aversion $1/\gamma$.Dadurch ist ein Investor mit hohem γ relativ ungewillt seinen Verbrauch zu verringern und die Wachstumsrate des Verbrauchs wird sich nur langsam mit dem Zeitdiskontierungsfaktor und risikofreien Zinsrate ändern. Der Dritte Term der rechten Seite der Gleichung repräsentiert den Effekt der Unentschlossenheit. Ein risiko-averser Inversor verhält sich unentschlossen bei steigenden Sicherheitssparmaßnahmen.
Die Euler Gleichung für Potenznutzenfunktionen wird benutzt um die Risikoprämie eines einzelnen risikobehafteten Wertpapiers durch den risikofreien Zinssatz zu beschreiben. Die logarithmische Form der allgemeinen Euler Formel (3.11), abzüglich γ mal (3.13), ist:

$$E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_t^2}{2} = \gamma \mathrm{Cov}_t(r_{t+1}, \Delta c_{t+1}) \tag{3.14}$$

Das besagt: Um im Gleichgewicht zu sein muss die erwartete Überrendite gleich der Risiko-Aversion γ mal der Kovarianz der Rendite mit dem Verbrauchswachstum sein. Ein ähnliche Gleichung beschreibt jede Risikoprämie,eines risikobehafteten Wertpapiers, in einem Model mit mehreren risikobehafteten Wertpapieren. In der Preistheorie von Wertpapieren wird diese Gleichung benutzt um Risikoprämie der Wertpapiere zu erklären und ist unter dem Namen *consumption capital asset pricing model* oder CCAPM bekannt.

3.2.2 Ein konstantes Verbrauch-Vermögens Verhältnis

Die Schwierigkeit bei dem lognormal Modell, das auch vom Verbrauch abhängt, ist dass der intertemporale Budgethaushalt (3.9) im Allgemeinen nicht loglinear ist, weil der Verbrauch subtrahiert wird von den Vermögenswerten bevor dieser mit dem Portfolio multipliziert wird. Die Kombination aus Subtraktion und Multiplikation kreiert ein unlösbare Nichtlinearität.
Wir nehmen an, dass das Verbrauch-Vermögens Verhätnis konstant ist, sodass dadurch der Budgethaushalt loglinear wird. Wir lösen dieses Modell unter dieser Annahme, und suchen Bedingungen die diese Annahmen rechtfertigen. Diese Konstante kann geschrieben werden als:

$$\frac{C_t}{W_t} = b \tag{3.15}$$

und die Budgetrestriktion (3.9) kann in logarithmischer Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \Delta w_{t+1} &= r_{p,t+1} + \log(1-b) \\ &= r_{f,t+1} + \alpha_t(r_{t+1} - r_{f,t+1}) + \frac{1}{2}\alpha_t(1-\alpha_t)\sigma_t^2 + \log(1-b) \end{aligned} \tag{3.16}$$

wobei die 2. Gleichheit durch Einsetzen in (2.20) entsteht.
Die Konstante (3.15) impliziert dass die Verbrauchswachstumsrate gleich der Wachstumsrate des Vermögens ist, so können die Terme des Verbrauchs in (3.13) und (3.14) durch die Terme der Vermögenswerte substituiert werden. Die Formel für die erwartete Rendite eines einzelnen risikobehafteten Wertpapiers (3.14) wird zu:

$$E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \sigma_t^2/2 = \gamma \mathrm{Cov}_t(r_{t+1}, \Delta w_{t+1}) = \gamma \alpha_t \sigma_t^2 \tag{3.17}$$

,die 2. Gleichheit folgt aus (3.16). Löst man diese Gleichung für α_t, erhalten wir wieder einmal die kurzsichtige Lösung (2.23):

$$\alpha_t = \frac{E_t r_{t+1} - r_{f,t+1} + \sigma_t^2/2}{\gamma \sigma_t^2} \tag{3.18}$$

Es ist trivial zu zeigen, dass diese kurzsichtige Lösung auch für mehrere Wertpapiere gilt, und ebenso für Langzeitinvestoren mit einem konstanten Verbrauch-Vermögens Verhält-

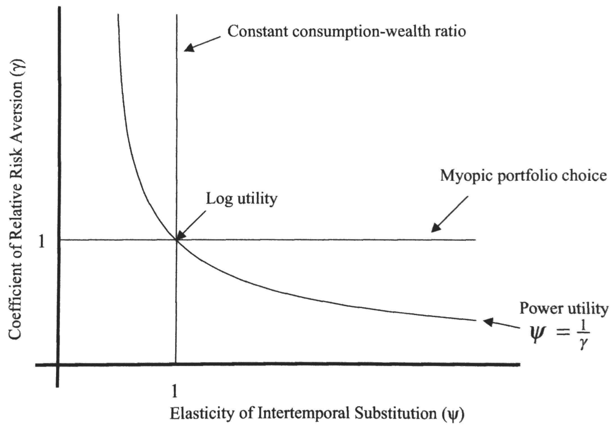
nis.
In einem Modell mit Potenznutzenfunktion führt die Annahme, dass das Verbrauch-Vermögens Verhältnis konstant ist, sofort zu dem Schluss dass die Portfoliowahl kurzsichtig sein muss. Nun muss man Bedingungen festlegen damit diese Annahme gerechtfertigt werden kann. Zuerst muss man annehmen dass die Renditen iid sind, damit es keine Änderungen in den Investitionmöglichkeiten, die möglicherweise die Veränderungen zwischen Verbrauch und Vermögen verursachen könnten, gibt. Die Unabhängigkeit der Potenznutzenfunktion impliziert dass der Verbrauch ein konstanter Bruchteil der Vermögensanteile ist. Zweitens, wenn die Risiko-Aversion $\gamma = 1$ ist, ist der Verbrauch genauso ein konstanter Bruchteil des Vermögens. Die Intuition des Ergebnisses ist dass die Änderungen in den Investitionsmöglichkeiten einen gegenseitigen Effekt auf die Relation zwischen Verbrauch und Vermögen hat. Eine verbesserte Investitionsmöglichkeit, also eine höhere risikofreie Zinsrate, steigert den Betrag der jede Periode verbraucht werden kann, ohne dabei das Vermögen zu verwenden. Dieser *Einkommenseffekt* zielt darauf ab den Verbrauch gegenüber dem Wohlstand zu steigern. Auf der anderen Seite schafft ein verbesserte Investitionsmöglichkeit den Anreiz den Verbrauch in die Zukunft zu verschieben. In dem Modell mit Potenznutzenfunktion ist der Fall mit logarithmischen Nutzen $\gamma = 1$, jener in dem sich Einkommen und Substitutionseffekte genau aufheben, sodass das Verbrauch-Vermögens Verhältnis immer konstant ist, egal ob Schwankungen in den Investitionsmöglichkeiten vorkommen.

3.3 Epstein-Zin Nutzenfunktion

Trotz der vielen attraktiven Eigenschaften des Potenznutzenfunktions-Modells, hat es eine höchst einschränkende Eigenschaft: Die Potenznutzenfunktion impliziert dass die Anpassungsfähigkeit zur intertemporalen Austauschung ψ der Kehrwert des Koeffizienten der relativen Risiko-Aversion γ ist. Epstein und Zin (1989,1991) und Weil (1989) benutzen die theoretischen Rahmen von Kreps und Porteus (1978) um eine flexiblere Version des einfachen Potzennutzenfunktions-Modell zu entwickeln. Das Epstein-Zin Modell enthält die wünschenswerte Unabhängigkeit der Paramter γ und ψ.
Die objektive Epstein-Zin Funktion ist rekursiv definiert durch:

$$U_t = \left\{(1-\gamma)C_t^{\frac{1-\gamma}{\theta}} + \delta\left(E_t U_{t+1}^{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right\}^{\frac{\theta}{1-\gamma}} \tag{3.19}$$

wobei $\theta \equiv (1-\gamma)/(1-1/\psi)$.
Wenn $\gamma = 1/\psi, \theta = 1$ wird die Rekursion linear und kann in Fortwärtsrichtung gelöst werden und führt zu dem bekannten zeitabhängigen Potenznutzenfunktions-modell.
Das Epstein-Zin Modell kann verstanden werden indem man sich Abbildung 3.3 ansieht.



Die Horizontale Achse zeigt die Bereitschaft zur intertemporalen Substitution ψ, während die vertikale Achse den Koeffizienten der relativen Risiko-Aversion γ zeigt. Die Menge der Punkte mit gleicher Anpassungsfähigkeit zur intertemporalen Substitution wird als vertikale Linie gezeichnet, während die Menge aller Punkte mit gleicher relativer Risiko-Aversion durch eine horizontale Linie dargestellt. Die Menge aller Punkte mit Potenznutzenfunktion wird als Hyperbel $\gamma = 1/\psi$ dargestellt. Die logarithmische

Nutzenfunktion wird durch alle 3 Linien geschnitten im Punkt $\gamma = \psi = 1$.
Die nichtlineare Rekursion (3.19) weißt auf den ersten Blick eine gewisse Komplexität auf, glücklicherweise haben Epstein und Zin gezeigt dass es eine Euler-Gleichung der Form

$$1 = E_t \left[\left\{ \delta \Big(\frac{C_{t+1}}{C_t} \Big)^{-\frac{1}{\psi}} \right\} \big\{ \frac{1}{(1 + R_{p,t+1})} \big\}^{1-\theta} (1 + R_{i,t+1}) \right] \tag{3.20}$$

gibt. Wobei, wie zuvor, $(1 + R_{i,t+1})$ die brutto Rendite von jedem einzelnen Asset bezeichnet, welche natürlich auch das risikolose und das Portfolio selbst beinhaltet.
Wenn wir $(1 + R_{i,t+1}) = (1 + R_{p,t+1})$ setzen, vereinfacht sich die Gleichung. Wenn die Rendite des Portfolios und der Verbrauch gemeinsam lognormal verteilt sind, dann ist der erwartete Verbrauchswachstum gleich

$$E_t[\Delta c_{t+1}] = \psi \log \delta + \psi E_t r_{p,t+1} + \frac{\theta}{2\psi} \mathrm{Var}\ _t[\Delta c_{t+1} - \psi r_{p,t+1}] \tag{3.21}$$

Die erwartete Verbrauchssteigerung wird bestimmt durch die zeitliche Einstellung, die erwartete Portfoliorendite und den Effekt der Ungewissheit, der im Term der Varianz zusammengefasst wird. Die Anpassungsfähigkeit zur intertemporal Substitution ψ und nicht der Koeffizient der Risiko-Aversion γ bestimmen die Reaktion des erwartetem Verbrauchswachstums auf die Abweichungen in der erwarteten Rendite. Die Zufälligkeit des Verbrauchwachstums steigert die Vorsichtssparmaßnahmen und senkt die aktuellen Ausgaben wenn $\theta > 0$ (eine Bedingung die durch die Potenznutzenfunktion mit $\theta = 1$ erfüllt wird) gilt, aber senkt sie die Vorsichtssparmaßnahmen und steigert die aktuellen Ausgaben wenn $\theta < 0$.
Wenn es nur ein risikobehaftetes Wertpapier gibt, dann ist die Prämie vom risikobehafteten Asset über das Sichere:

$$E_t - r_{f,t+1} + \frac{\sigma_t^2}{2} = \theta \frac{\mathrm{Cov}_t(r_{t+1}, \Delta c_{t+1})}{\psi} + (1-\theta)\mathrm{Cov}_t(r_{t+1}, r_{p,t+1}) \tag{3.22}$$

Die erwartete Überrendite eines risikobehafteten Wertpapieres ist der gewichtete Durchschnitt der Kovarianz des risikobehafteten Assets mit der Verbrauchswachstum (dividiert durch die Anpassungsfähigkeit zur intertemporalen Substitution ψ) und die i-te Kovarianz des Wertpapiers mit der Portfoliorendite. Die Gewichte sind θ beziehungsweise $1 - \theta$.
Die bekannten Vorraussetzungen für eine kurzsichtige Portfoliowahl folgen direkt aus

der Gleichung (3.22) . Wenn die Renditen iid, dann ist der Verbrauch ein konstanter Bruchteil des Vermögens und die Kovarianz mit des Verbrauchswachstum ist gleich der Kovarianz mit der Portfoliorendite.

Der Fall mit einheitlichen EIS benötigt eine vorsichtige Behandlung in diesem Modell. Wenn ψ sich 1 annähert, geht θ gegen minus oder plus unendlich. Dann kann die Gleichung (3.21) nur erfüllt werden wenn Var $_t[\Delta c_{t+1} - r_{p,t+1}] = 0$, was wiederum impliziert dass es ein konstantes Verbrauch-Vermögens Verhältnis gibt. Giovanni und Weil (1989) haben in ihrer Analyse gezeigt dass ein Modell mit $\psi = 1$ nicht eine kurzsichtige Portfoliowahl sein kann, außer es gilt $\gamma = 1$ (woraus wiederum die logarithmische Nutzenfunktion folgt). Die Konstanz des Verbrauch-Vermögen Verhältnis in dem einheitlichen EIS Modell macht es zu einer besonders lenkbaren Spezialisierung.

Literatur

[1] John Y. Campbell und Luis M. Viceira: **Strategic Asset Allocation** (2000)

[2] `https://en.wikipedia.org/wiki/Modern_portfolio_theory`, Abfrage am 09.01.2016

[3] `http://www.ftc.at/li/liview/action/df/frmLiID/11061/?SGLSESSID=435db32p524uku2edb7vbvsts6&/1/`, Abfrage am 09.01.2016

[4] Chen, Favilukis, Ludvigson: **An estimation of economic models with recursive preferences**,
unter `http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.3982/QE97/pdf` , Abfrage am 11.01.2016