



Seminararbeit zum Seminar aus Finanz- und
Versicherungsmathematik

EXTREME FINANCIAL RISKS

Julia Dicketmüller
1426395

Betreuer: Dr. Stefan Gerhold

24.02.2017

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Risiken	3
2.1	Risiken bewerten	3
2.1.1	einheitliche Bemessung von Risiken	3
2.1.2	Vereinfachung der Risikobemessung	5
2.1.3	konsequente Bemessung von Risiken	6
3	Copula	8
3.1	Abhängigkeit	8
3.2	Definition und Eigenschaften von Copulas	10
3.3	Copula-Familien	12
3.3.1	Elliptische-Copulas	12
3.3.2	Archimedische-Copulas	14
3.3.3	Extremwert-Copulas	15
3.4	Anwendung von Copulas	15
3.4.1	Monte-Carlo Studie	16
3.4.2	Stresstest	16
3.4.3	Simulation von Zufallsvariablen definiert durch elliptische Copulas	17
3.4.4	Simulation von Zufallsvariablen beschrieben durch glatte Copulas	18
4	Zusammenfassung	21
5	Literaturverzeichnis	22

1 Einführung

Durch kurze Überlegungen kommt man relativ rasch auf den Entschluss, dass die moderne westliche Gesellschaft schon eine ganz paradoxe Beziehung zu Risiken besitzt. Einerseits existiert das schier unmögliche Streben nach einer risikofreien Gesellschaft und andererseits ist das menschliche Verhalten dafür verantwortlich, dass die Risiken in den letzten Jahren extrem gewachsen sind. Besonders die Wahrnehmung der Risiken hat sich sehr stark verändert, neben den Naturkatastrophen wie Erdbeben, Fluten, Dürren, Hurrikans und Vulkanausbrüche müssen auch die vom Menschen verursachten Katastrophen berücksichtigt werden, vor allem die auf den technischen Fortschritt zurückzuführen sind, so wie Tschernobyl oder Bophal. Diese neue Quelle von extremen Risiken verlangt natürlich nach einer neuen Art von Betrachtung und Behandlung.

Im Finanzbereich sind unter allen möglichen Phänomene, die eintreten können, die Abstürze (Crashes) wohl die markantesten Ereignisse und deren Häufigkeit und Auswirkungen haben sich in den letzten Jahrzehnten extrem gesteigert. So muss man zum Beispiel nur kurz den weltweiten Crash vom Oktober 1987 betrachten, bei dem sich innerhalb von wenigen Tagen Millionen von Euro verflüchtigt haben. Ein weiteres Beispiel wäre der Zusammenbruch der Internet Blase bei dem mehr als ein Drittel des Weltkapitals von 1999 nach März 2000 verschwunden war. Es ist daher höchst wünschenswert Instrumente zu besitzen, die helfen die extremen Risiken der Finanzmärkte zu verstehen, zu überwachen und zu begrenzen um solche Ereignisse schon im Vorhinein zu verhindern.

2 Risiken

Ein Investor ist immer daran interessiert den Gewinn zu maximieren und die Unsicherheiten, also die Risiken, auf den erwarteten Wert der Erträge aus seiner Anlage zu minimieren.

2.1 Risiken bewerten

Eine immer wiederkehrende und wichtige Frage im Finanzsektor, ist die Bewertung von Risiken, denn nur so ist es möglich optimale Entscheidungen zu treffen. Obwohl diese Frage von solch großer Bedeutung ist, gibt es noch immer keine allgemeingültige Lösung dafür. Schon seit Mitte des 20. Jahrhunderts werden viele verschiedene Lösungswege für dieses Problem entwickelt. So hat die Arbeit von Von Neuman und Morgenstern zur mathematischen Definition der erwarteten Nutzenfunktion geführt, und durch diese Definition konnte nun auch das Konzept über Risikovermeidung formuliert werden.

Rotschild und Stiglitz gelang es aufgrund der Eigenschaften dieser Nutzenfunktion das Konzept über das steigende Risiko aufzustellen und zu definieren.

Aber leider haben die Untersuchungen von Allais gezeigt, dass die Axiome von Von Neuman und Morgenstern oft von den Menschen verletzt wurden. So kam es zu vielen Verallgemeinerungen um dieses sogenannte Allais-Paradoxon zu lösen, aber bis jetzt wurde noch keine Lösung für dieses Problem gefunden. Das Allais-Paradoxon ist nichts Anderes als ein Verstoß von Entscheidern gegen das Unabhängigkeitsaxiom, welche experimentell festgestellt werden.

Das Unabhängigkeitsaxiom ist eine grundlegende Annahme über eine entscheidungstreffende Person. Laut dem Unabhängigkeitsaxiom gilt:

Wenn 2 Alternativen identische Konsequenzen für bestimmte Ereignisse besitzen, so haben diese Ereignisse keinen Einfluss bezüglich der Entscheidung einer Person, zwischen den beiden zu Verfügung stehenden Alternativen.

Vor kurzem erschien eine Vereinfachung von Föllmer und Schied basierend auf der Theorie von Artzner. Diese Vereinfachung basiert auf verschiedenen Axiomen und dadurch ist es möglich Risiken einheitlich zu bemessen. Somit wurden Instrumente geschaffen um Risiken zu bewerten und zu vergleichen.

2.1.1 einheitliche Bemessung von Risiken

Ein Risiko wird einheitlich bemessen laut Artzner, wenn die nachstehenden 4 Axiome erfüllt werden.

Wir nehmen an, dass die Menge aller möglichen Zustände Ω endlich ist und \mathcal{G} unser Risikoraum ist, welcher isomorph in \mathbb{R}^N liegt. Die Risikoposition \mathcal{X} ist ein Vektor $\in \mathbb{R}^N$ und unser ρ ist unser Risikomaß von $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

Für unser erstes Axiom betrachten wir eine Risikoposition mit Endwert \mathcal{X} und in unser risikofreies Asset investieren wir ein Kapital α zu Beginn der Zeitperiode. Somit wird am Ende der Zeitperiode aus $\alpha \rightarrow \alpha \cdot (1 + i_0)$, wobei i_0 einfach den Zinssatz bezeichnet. Dann folgt:

Axiom 1: Translationsinvarianz

$$\forall \mathcal{X} \in \mathcal{G} \ \& \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \rho(\mathcal{X} + \alpha \cdot (1 + i_0)) = \rho(\mathcal{X}) - \alpha$$

Das bedeutet nichts Anderes als, dass das Investment von Betrag α im risikofreien Asset, das Risiko genau um den selben Betrag α reduziert. Im Speziellen gilt sogar für jede beliebige Risikoposition \mathcal{X} : $\rho(\mathcal{X} + \rho(\mathcal{X}) \cdot (1 + r)) = 0$ das bedeutet, dass ein Investment von der Höhe $\rho(\mathcal{X})$ in einem risikofreien Asset, einen exakten Ausgleich des Risikos der Position \mathcal{X} ermöglicht.

Für das zweite Axiom betrachtet man zwei Risikoinvestments \mathcal{X}_1 & \mathcal{X}_2 , diese Risikoinvestments können die Positionen von zwei Händlern eines Investmenthauses darstellen. Für den Vorgesetzten ist es von sehr großer Bedeutung zu wissen, dass das angesammelte Risiko aller Händler geringer ist als die Summe der zugezogenen Risiken aller Händler. In unserem Spezialfall muss daher gelten, dass das Risiko, welches der Position $(\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2)$ zugeordnet wird kleiner als oder gleich der Summe der einzelne zwei Risiken ist, welche den Positionen \mathcal{X}_1 und \mathcal{X}_2 zugeordnet sind. Dies führt uns nun zu folgendem Axiom:

Axiom 2: Subadditivität

$$\forall(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G}, \quad \rho(\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2) \leq \rho(\mathcal{X}_1) + \rho(\mathcal{X}_2)$$

Durch die Subadditivität wird der Portfolio Manager dazu angespornt für sein Investment unterschiedliche Positionen zu wählen. Damit es zur Streuung kommt und somit das Gesamtrisiko minimiert wird.

Axiom 3: positive Homogenität

$$\forall \mathcal{X} \in \mathcal{G} \ \& \ \forall \lambda \geq 0, \quad \rho(\lambda \cdot \mathcal{X}) = \lambda \cdot \rho(\mathcal{X})$$

Dieses Axiom ist aber nur mit großer Vorsicht zu betrachten, einerseits veranschaulicht dieses Axiom die Wichtigkeit von Homogenität und andererseits ist es ziemlich kontrovers. Im Prinzip bedeutet dieses Axiom nur, dass das Risiko welches zugehörig ist zu unserer Position mit seiner Größe ansteigt, in unserem Fall sogar proportional. Daraus folgt das ein Risiko der Position $2\mathcal{X}$, zweimal so groß ist wie das Risiko der Position \mathcal{X} . Dies entspricht der Wahrheit, solange man berücksichtigt, dass ein Risiko einer großen Position genau so leicht bereinigt werden kann wie das Risiko einer kleineren. Allerdings ist dies nicht gerade realistisch. Weil eine große Position in einem gegebene Asset riskanter ist als viele verschiedene kleinere Positionen, mit unterschiedlichen zugehörigen Risiken, welche aber zusammen mit der großen Position übereinstimmen.

Für unser letztes Axiom nehmen wir an, dass für alle möglichen Zustände in Ω gilt, dass das Risiko von \mathcal{X} zu einem größeren Verlust führt als das Risiko von Y . Daher muss gelten, dass alle Komponenten des Vektors $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^N$ kleiner oder gleich der Komponenten von Y sind. Es muss dann gelten, dass das Risikomaß von $\rho(\mathcal{X})$ größer oder gleich dem Risikomaß von $\rho(Y)$ ist.

Axiom 4: Monotonie

$$\forall \mathcal{X}, Y \in \mathcal{G} \text{ für die gilt } X \leq Y, \quad \rho(\mathcal{X}) \geq \rho(Y)$$

Diese 4 Axiome zusammen beschreiben nun die einheitliche Bemessung von Risiken, und diese lässt die folgende allgemeine Darstellung zu:

$$\rho(\mathcal{X}) = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{-\mathcal{X}}{1 + i_0} \right]$$

Wobei \mathcal{P} eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen beschreibt.

Somit veranschaulicht die einheitliche Bemessung von Risiken im Prinzip, die Erwartung des maximalen Verlustes betrachtet auf verschiedenen Szenarien. Es ist offensichtlich klar, umso größer die Anzahl der Szenarien, umso größer der Wert von $\rho(\mathcal{X})$ und somit umso zurückhaltender das Risikomaß.

2.1.2 Vereinfachung der Risikobemessung

Die einheitliche Risikobemessung kann vereinfacht werden durch die sogenannte konvexe Bemessung von Risiken. Hierbei ersetzt man einfach die Axiome 2 und 3 der einheitlichen Bemessung, also die Subadditivität und positive Homogenität, durch ein Axiom über Konvexität bei Risikomaßen.

Axiom 5: Konvexität

$$\rho(\lambda \cdot X + (1 - \lambda) \cdot Y) \leq \lambda \cdot \rho(X) + (1 - \lambda) \cdot \rho(Y) \quad \lambda \in [0, 1]$$

Die konvexe Risikobemessung führt uns nun zu folgender Darstellung:

$$\rho(\mathcal{X}) = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{-\mathcal{X}}{1 + i_0} - \alpha(\mathbb{P}) \right]$$

Wobei \mathcal{M} die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum (Ω, \mathcal{F}) bezeichnet, Ω beschreibt den Zustandsraum und \mathcal{F} ist eine σ -Algebra. Im Allgemeinen ist \mathcal{M} die Menge aller endlichen additiven und nicht-negativen Funktionen \mathbb{P} auf \mathcal{F} , welche $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ erfüllen. Für $\alpha(\mathbb{P})$ gilt noch:

$$\alpha(\mathbb{P}) = \sup_{\mathcal{X} \in \mathcal{G} | \rho(\mathcal{X}) \leq 0} \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left[\frac{-X}{1 + i_0} \right]$$

Diese Funktionen zusammen charakterisieren unsere konvexe Risikobemessung nun vollständig.

Eine andere Alternative, um die einheitliche Risikobemessung zu vereinfachen, ist gegeben indem man Axiom 4, also das Axiom über Monotonie, durch folgendes ersetzt:

Axiom 6: beschränkte Erwartung

$$\forall \mathcal{X} \in \mathcal{G} \quad \rho(\mathcal{X}) \geq \frac{\mathbb{E}[-\mathcal{X}]}{1 + i_0}$$

wobei die Gleichheit nur gegeben ist wenn \mathcal{X} sicher ist. \mathcal{X} wird als sicher bezeichnet wenn folgendes erfüllt ist:

$$\mathcal{X}(\omega) = a \quad \forall \omega \in \Omega \quad \& \quad \text{beliebiges } a \in \mathbb{R} \quad \& \quad \mathbb{P}(\omega) \neq 0$$

\mathbb{P} bezeichnet ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf den Messraum (Ω, \mathcal{F}) . \mathcal{F} ist eine σ -Algebra sodass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ einen einfachen Maßraum darstellt.

Die Axiome 1-3 und 6 definieren nun gemeinsam die erwartete beschränkte Risikobemessung.

2.1.3 konsequente Bemessung von Risiken

Die konsequente Bemessung von Risiken ist eine passende Ergänzung, zur einheitlichen und konvexen Bewertung von Risiken bei finanziellen Investitionen. Besonders wenn es sich bei der Bewertung um Risikobewertungen bei Potfolios handelt.

Wie schon bei der einheitlichen Bemessung angenommen steht \mathcal{G} wieder für den Risikoraum und X für den zukünftigen Wert einer Risikoposition.

Zusätzlich nehmen wir jetzt noch an, dass das Risikomaß $\tilde{p}(\cdot)$ immer positiv sein muss und das führt uns schon zu unserem ersten Axiom der konsequenten Bemessung.

Axiom 7: Positivität

$$\forall X \in \mathcal{G}, \quad \tilde{p}(X) \geq 0$$

Die Gleichheit ist wieder nur gegeben wenn X sicher ist (siehe Axiom 6 beschränkte Erwartung).

Nun erweitern wir unsere Position um einen gegebenen Betrag α , welcher wieder in unser risikofreie Asset investiert wird und dessen Rendite i_0 ist. Daraus folgt, dass sich die neue Position des zukünftigen Gewinn wie folgt definieren $Y = X + \alpha * (1 + i_0)$ lässt. Für X und den nicht beliebigen Koeffizienten α gilt:

$$\forall X \in \mathcal{G}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \tilde{p}(X + (1 + i_0) \cdot \alpha) = \tilde{p}(X)$$

Diese Beziehung ist wahr für alle i_0 und α . Also kommen wir nun zum nächsten Axiom für die konsequente Bemessung.

Axiom 8: Translationsinvarianz

$$\forall X \in \mathcal{G}, \forall k \in \mathbb{R}, \quad \tilde{p}(X + k) = \tilde{p}(X)$$

Für unser letztes Axiom gehen wir jetzt noch davon aus, dass das Risikomaß sich erhöht mit der Anzahl der Assets im Portfolio. Diese Annahme kann wie folgt dargestellt werden:

$$\forall X \in \mathcal{G}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \tilde{p}(\lambda \cdot X) = f(\lambda) \cdot \tilde{p}(X)$$

Wobei die Funktion $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ steigend und für das Liquiditätsrisiko steht. Das Liquiditätsrisiko ist die Gefahr, anstehenden Zahlungsverpflichtungen nicht mehr uneingeschränkt und fristgerecht einhalten zu können. Die einzigen Funktionen, die diese Voraussetzung auch erfüllen, sind die Funktionen $f_\zeta(\lambda) = \lambda^\zeta$ mit $\zeta \leq 1$.

Beweis:

Um diese Funktionen zu erhalten, wird einfach der nachfolgende Trick angewendet:

$$\tilde{p}(\lambda_1 \lambda_2 \cdot X) = f(\lambda_1) \cdot \tilde{p}(\lambda_2 \cdot X) = f(\lambda_1) \cdot f(\lambda_2) \cdot \tilde{p}(X) = f(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \tilde{p}(X)$$

Dies führt uns nun zu:

$$f(\lambda_1 \cdot \lambda_2) = f(\lambda_1) \cdot f(\lambda_2)$$

Und die konvexe Lösung dieser Gleichung ist $f_\zeta(\lambda) = \lambda^\zeta$ mit $\zeta \leq 1$. ■

Nun können wir Axiom 3 der einheitlichen Bemessung umformulieren und zwar im Bezug auf positive Homogenität von Grad ζ :

Axiom 9: positive Homogenität

$$\forall X \in \mathcal{G}, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \tilde{p}(\lambda \cdot X) = \lambda^\zeta \cdot \tilde{p}(X)$$

Falls $\zeta = 1$ ist das Risiko direkt proportional zu der Größe der Position, wie es auch bei der einheitlichen Bemessung der Fall ist (siehe Axiom 3).

3 Copula

In diesem Kapitel stelle ich nun den Begriff Copula vor, dieser beschreibt die Abhängigkeit zwischen mehreren zufälligen Variablen. Diese Variablen können entweder der Gewinn von verschiedenen Assets sein, der Wert eines gegebenen Assets zu verschiedenen Zeitpunkten oder sogar eine beliebige Menge von wirtschaftlichen Variablen. Copulas sind sehr praktisch für wirtschaftliche, finanzielle und versicherungsmathematische Anwendungen.

3.1 Abhängigkeit

Bevor wir uns mit der Abhängigkeit von verschiedenen Variablen beschäftigen, werden wir kurz auf die Unabhängigkeit eingehen. Der Begriff Unabhängigkeit von zufälligen Variablen ist sehr einfach zu formulieren. Zwei Variablen X und Y werden als unabhängig bezeichnet, genau dann wenn für beliebige x und y folgendes gilt:

$$\mathbb{P}[X \geq x, Y \geq y] = \mathbb{P}[X \geq x] \cdot \mathbb{P}[y \geq y]$$

oder äquivalent dazu

$$\mathbb{P}[X \geq x|Y] = \mathbb{P}[X \geq x]$$

Einfach gesagt, zwei zufällige Variablen sind unabhängig voneinander, wenn die Informationen, die man über die eine zufällige Variable besitzt nicht dazu hilfreich ist etwas über die andere in Erfahrung zu bringen. Im Gegensatz zur Unabhängigkeit ist der Begriff der Abhängigkeit schon um einiges schwieriger zu definieren.

Für die Definition der Abhängigkeit von verschiedenen Variablen ziehen wir zwei Ansätze heran. Zunächst starten wir mit der Betrachtung von der gemeinsamen kompletten Abhängigkeit. Zwei zufällige Variablen X und X' sind gemeinsam komplett abhängig voneinander, wenn man durch die Information über die Variable X an Information über die Variable X' gelangt, dasselbe gilt auch genau umgekehrt. Dies ist auch einfach gleichbedeutend damit, dass eine Selbstabbildung f existiert, sodass fast überall gilt:

$$X' = f(X)$$

f ist eine strikt fallende oder strikt steigende Funktion. Somit ist die eine Variable perfekt vorhersehbar durch die andere Variable. In diesem Fall werden die Variablen als *comonotonic* bezeichnet.

Für unseren zweiten Ansatz, um das Konzept der Abhängigkeit zu erklären, betrachten wir folgendes Statement:

„Die zufälligen Variablen X und Y zeigen die selbe Abhängigkeit wie die zufälligen Variablen X' und Y' “ (Y. Malevergne, D.Sornette: Extreme Financial Risks. Berlin: Springer-Verlag 2006, S.101)

Eine mögliche Interpretation dieses Statement wird im nachfolgenden Teil dieses Kapitel genauer vorgestellt. Die Zufallsvariablen X und X' sowie die Variablen Y und Y' sind *comonotonic*. Wir nehmen an, es existiert eine Funktion C , welche die Abhängigkeit von zwei zufälligen Variablen X und Y beschreibt und eine zweite Funktion C' welche die

Abhängigkeit von X' und Y' beschreibt.

Weil unsere Variablen *comonotonic* sind, können wir den vorher vorgestellten Ansatz über die gemeinsame komplette Abhängigkeit heranziehen und folgende Gleichungen aufzustellen.

$$X' = h_1(X) \qquad \& \qquad Y' = h_2(Y)$$

Wobei h_1 und h_2 steigenden Funktionen auf \mathbb{R} sind.

Nun betrachten wir, wie man die Funktion C aufstellt. Wir nehmen zwei zufällige Variablen X und Y an und deren gemeinsame Verteilungsfunktion, welche mit H bezeichnet wird:

$$H(x, y) = \mathbb{P}[X \leq x; Y \leq y]$$

Die Randverteilungen von X und Y entsprechen:

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathbb{P}[X \leq x] = \lim_{t \rightarrow \infty} H(x, t) \\ G(y) &= \mathbb{P}[Y \leq y] = \lim_{t \rightarrow \infty} H(t, y) \end{aligned}$$

Zur Einfachheit nehmen wir zusätzlich an, dass F und G stetig und steigend sind, denn so können wir davon ausgehen, dass F^{-1} und G^{-1} auf jeden Fall existieren. Nun definieren wir:

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)), \quad \forall u, v \in [0, 1]$$

Wir betrachten die nun zu Beginn definierten zufälligen Variablen X' und Y' , und kommen daher auf die folgende Darstellung der gemeinsamen Verteilungsfunktion:

$$\begin{aligned} H'(x, y) &= \mathbb{P}[X' \leq x; Y' \leq y] = \mathbb{P}[X \leq h_1^{-1}(x); Y \leq h_2^{-1}(y)] \\ &= (h_1^{-1}(x), h_2^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Wobei die Randverteilungen definiert sind:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \mathbb{P}[X' \leq x] = F(h_1^{-1}(x)) \\ G'(y) &= \mathbb{P}[Y' \leq y] = G(h_2^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von

$$C'(u, v) = H'(F'^{-1}(u), G'^{-1}(v)), \quad \forall u, v \in [0, 1],$$

und durch algebraische Multiplikation erhält man nun:

$$C(u, v) = C'(u, v), \quad \forall u, v \in [0, 1].$$

Es stellt sich heraus, dass die Funktion C die einzige Funktion ist, welche die vollständige

Abhängigkeit von X und Y enthält.

Durch einfaches rechnen kommt man schnell zu den folgenden Eigenschaften für unser C :

1. $C(u, 1) = u$ und $C(1, v) = v, \forall u, v \in [0, 1]$
2. $C(u, 0) = C(0, v) = 0, \forall u, v \in [0, 1]$
3. C ist 2-steigend, weil für alle $u_1 \leq u_2$ und $v_1 \leq v_2$ gilt:

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$$

Die zweite Eigenschaft von C verdeutlicht, dass falls bei einer Randverteilung die Nullwahrscheinlichkeit auftritt, dies auch bei der gemeinsamen Verteilung der Fall sein muss. Die dritte Eigenschaft zeigt, dass falls beide Ränder steigen, auch die gemeinsame Wahrscheinlichkeit steigen muss. Wie wir nun im nächsten Kapitel sehen werden beschreiben diese drei Eigenschaften die sogenannten Copulas.

3.2 Definition und Eigenschaften von Copulas

In diesem Kapitel stelle ich nun die wesentlichen Eigenschaften von Copulas vor und weitere wichtige Theoreme, die mit Copulas in Verbindung stehen.

Eine Copula ist eine Funktion, die einen Zusammenhang von verschiedenen Zufallsvariablen angeben kann, und zwar genau zwischen den Randverteilungsfunktionen und den gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen .

Definition 1: Copula

Eine Funktion $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ wird als n-Copula bezeichnet wenn sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- $\forall u \in [0, 1], C(1, \dots, 1, u, \dots, 1) = u$
- $\forall u_i \in [0, 1], C(u_1, \dots, u_n) = 0$ wenn mindestens einer der u_i gleich null ist
- C ist n-steigend, das heißt für jedes Rechteck $R = \prod_{i=1}^n [x_i, y_i] \subseteq [0, 1]^n$ ist das C -Volumen nicht negativ: $V_c(R) = \sum_{z \in \prod_{i=1}^n \{x_i, y_i\}} (-1)^{N(z)} \cdot C(z) \geq 0$, wobei $N(z) := |\{k : z_k = x_k\}|$ ist.

Durch diese Definition ist eine Copula nichts Anderes als eine multivariate Verteilung $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$, deren eindimensionale Randverteilungen gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ sind.

Theorem 1: Skalar's Theorem

F ist eine n -dimensionale Verteilungsfunktion mit stetigen eindimensionalen Randverteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n , somit existiert ein eindeutige n -Copula $C : [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ für die gilt:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

Falls bei diesem Theorem die Stetigkeit der Randverteilungen nicht gegeben ist, so kann trotzdem eine n -Copula gefunden werden, nur die Eindeutigkeit ist nicht mehr gegeben. Mit diesem Theorem besitzt man nun einerseits ein Schema zur Erstellung eines Copula und andererseits eine Parametrisierung für eine multivariate Verteilungsfunktion. Wenn man zum Beispiel eine multivariate Verteilungsfunktion F mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n gegeben hat, dann gilt dass die Funktion :

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

automatisch eine n -Copula ist. Diese Copula ist die Copula der multivariaten Verteilungsfunktion F . Durch diese Methode gelingt es ganz einfach zu den Ausdrücken von Standard-Copulas, sowie der Gauss-Copula, zu kommen.

Theorem 2: Invarianz Theorem

X_1, \dots, X_n sind stetige Zufallsvariablen mit Copula C . Wenn zusätzlich noch gegeben ist, dass $h_1(X_1), \dots, h_n(X_n)$ steigende Funktionen sind, dann gilt dass die Zufallsvariablen $Y_1 = h_1(X_1), \dots, Y_n = h_n(X_n)$ exakt die selbe Copula C besitzen.

Dieses Theorem demonstriert, dass durch die Copula C die vollständigen Abhängigkeiten zwischen den n unabhängigen Variablen erfasst wird und dies ohne Berücksichtigung der Gestalt der Randverteilungen.

Nun werden noch ein paar hilfreiche Propositionen bezüglich Copulas vorgestellt.

Proposition 1:

Gegeben ist ein n -Copula, für alle $u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$ und alle $v_1, \dots, v_n \in [0, 1]$ gilt:

$$|C(v_1, \dots, v_n) - C(u_1, \dots, u_n)| \leq |v_1 - u_1| + \dots + |v_n - u_n|$$

Diese Proposition ist eine direkte Folgerung daraus, dass ein Copula n -steigend sein müssen.

Proposition 2:

C ist ein n -Copula. Für fast alle $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ existieren die partiellen Ableitungen von C nach u_i für $i \in (1, \dots, n)$ und es gilt:

$$0 \leq \frac{\partial C}{\partial u_i}(u_1, \dots, u_n) \leq 1$$

Gemeinsam zeigen diese zwei Propositionen, dass Copulas regelmäßig oder glatt ¹ sind. Die Bedingung der Glattheit ist sehr vorteilhaft für numerische Simulationen, auf welche wir später noch genauer eingehen werden.

Aufgrund der Eigenschaft, dass Copulas n-steigend sein müssen, kann man für jede Copula eine obere und untere Grenze finden, und dies führt uns zu unserer letzten Proposition.

Proposition 3: Frechet-Hoeffding

C ist ein n-Copula, für alle $u_1, \dots, u_n \in [0, 1]$ gilt:

$$\max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \min(u_1, \dots, u_n)$$

Die obere Grenze ist selbst eine n-Copula, während die untere Grenze nur für n=2 eine Copula darstellt.

Durch diese untere Grenze ist es möglich für einen fixen Punkt $(u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ eine existente Copula \tilde{C} zu finden:

$$\tilde{C}(u_1, \dots, u_n) = \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0)$$

Die obere Grenze der Frechet-Hoeffding repräsentiert die größte Form der Abhängigkeit, die verschiedene zufällige Variablen zueinander haben können.

3.3 Copula-Familien

Schon durch das Skalar-Theorem haben wir erkannt, dass man für jede multivariate Verteilung ganz einfach eine zugehörige Copula finden kann. In diesem Kapitel möchte ich nun einige Familien von Copulas vorstellen.

3.3.1 Elliptische-Copulas

Die elliptischen Copulas lassen sich von den elliptischen Verteilungen herleiten. Zwei wichtige Beispiele für elliptische Copulas sind die Gauss- und Student-Copula. Diese zwei Arten von Copula sind sich im Kernstück des Aufbaues ziemlich ähnlich, besonders wenn sich der Freiheitsgrad der Student-Copula erhöht. Eine Konsequenz daraus ist, dass es oft ziemlich schwierig ist zwischen den beiden zu unterscheiden. Jedoch haben diese zwei Copulas sehr unterschiedliche Verhaltensweisen im Bezug auf die Abhängigkeit von Extremen. Ein großer Vorteil von elliptischen Copulas ist, dass sie sich sehr gut für numerische Simulationen und Studien von Szenarien eignen.

3.3.1.1 Gauss-Copula

ϕ beschreibt die Normal-Verteilung oder Gauss-Verteilung und $\phi_{p,n}$ beschreibt die n-dimensionale Gauss-Verteilung mit Korrelationsmatrix p . Somit sieht die Gauss n-Copula mit Korrelationsmatrix p wie folgt aus:

$$C_{p,n}(u_1, \dots, u_n) = \phi_{p,n}(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n))$$

Die Dichte ist gegeben durch

$$c_{p,n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial C_{p,n}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots u_n}$$

¹Funktionen werden als glatt bezeichnet wenn sie unendlich oft differenzierbar sind

gleichbedeutend mit

$$c_{p,n}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\sqrt{\det p}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^t(u)(p^{-1} - Id)y(u)\right)$$

wobei gilt

$$y^t(u) = (\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n))$$

Die Gauss-Copula ist völlig bestimmt durch die Informationen, welche man durch die Korelationsmatrix p erhält.

3.3.1.2 Student-Copula

Gegeben ist eine n -dimensionale Student-Verteilung $T_{n,p,v}$ mit Freiheitsgrad v und shape matrix p . Eine n -dimensionale Student-Verteilung $T_{n,p,v}$ sieht wie folgt aus:

$$T_{n,p,v} = \frac{1}{\sqrt{\det p}} \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})(\pi v)^{\frac{n}{2}})} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^t p^{-1} x}{v}\right)^{\frac{v+n}{2}}}$$

Somit sieht unser Student-Copula wie folgt aus:

$$C_{n,p,v}(u_1, \dots, u_n) = T_{n,p,v}(T_v^{-1}(u_1), \dots, T_v^{-1}(u_n))$$

Wobei T_v die univariate Student-Verteilung mit Freiheitsgrad v beschreibt. Für die Dichte gilt:

$$c_{n,p,v}(u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{\sqrt{\det p}} \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2})[\Gamma(\frac{v}{2})]^{n-1}}{[\Gamma(\frac{v+1}{2})]^n} \frac{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{y_k^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}{\left(1 + \frac{y^t p^{-1} y}{v}\right)^{\frac{v+n}{2}}}$$

wobei y^t wie folgt definiert ist

$$y^t = (T_v^{-1}(u_1), \dots, T_v^{-1}(u_n)).$$

Die Student-Copula tendiert gegen die Gauss-Copula für $v \rightarrow \infty$

$$\sup_{u \in [0,1]^n} |C_{n,p,v}(u) - C_{p,n}(u)| \rightarrow 0, \quad v \rightarrow \infty$$

Die Student Copula baut auf zwei Parametern auf. Einerseits auf die shape matrix p und andererseits noch auf den Freiheitsgrad v .

3.3.2 Archimedische-Copulas

Eine sehr große Anzahl von Modellen, die dazu entwickelt wurden die Abhängigkeit von verschiedenen Quellen von Risiken in der Versicherungsbranche zu klären, basieren auf den Archimedischen Copulas.

Definition 2: Archimedische-Copulas

ϕ ist eine strikt fallende, konvexe Funktion von $[0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ und es gilt $\phi(1) = 0$. $\phi^{[-1]}$ ist die Pseudoinverse von ϕ :

$$\phi^{[-1]} = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & \text{wenn } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & \text{wenn } t \geq \phi(0) \end{cases}$$

Somit ist die Funktion

$$C(u, v) = \phi^{[-1]}(\phi(u) + \phi(v))$$

eine archimedische Copula.

Durch die obige Definition erhalten wir ganz schnell und einfach die Definition eines archimedischen n-Copula:

$$C_n(u_1, \dots, u_n) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n))$$

Die Abhängigkeitsstruktur zwischen n Zufallsvariablen wird normalerweise durch eine Funktion mit n Variablen beschrieben, aber bei archimedischen Copulas wird diese Funktion auf eine Funktion mit einer Variable reduziert. Diese Funktion wird als Generator ϕ bezeichnet.

Es existiert eine große Anzahl an Archimedischen-Copulas, aber ich möchte nur kurz ein paar der wichtigsten vorstellen:

- **Clayton-Copula**

Eine Clayton-Copula wird sehr oft als Grenz-Copula verwendet.

$$C_{\theta}^{Cl} = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0), \quad \theta \in [-1, \infty)$$

Wobei für den Generator $\phi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ gilt.

- **Gumbel-Copula**

Gumbel-Copula werden oft verwendet um die Abhängigkeit, unter der Verwendung, von der Extreme-Value-Theory zu beschreiben.

$$C_{\theta}^G = \exp(-[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}]^{1/\theta}), \quad \theta \in [1, \infty)$$

Für den Generator gilt nun $\phi(t) = (-\ln t)^{\theta}$

- **Frank-Copula**

$$C_{\theta}^F(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right), \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Hier gilt nun für unser $\phi(t) = -\ln \frac{e^{1-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$.

Wenn man die untere Grenze von Frechet-Hoeffding betrachte sieht man zum Beispiel auch einen Archimedischen-Copula, für die obere Grenze trifft dies aber nicht zu. Aus diesem Grund stelle ich jetzt noch eine letzte Familie von Copulas vor.

3.3.3 Extremwert-Copulas

Eine weitere Familie von Copulas, welche oft angewendet werden, sind die Extremwert-Copulas.

Definition 3: Extremwert-Copula

Alle Copula die folgende Bedingungen erfüllen werden als Extremwert-Copula bezeichnet:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \exp \left[-V \left(-1 \frac{1}{\ln u_1}, \dots, -1 \frac{1}{\ln u_n} \right) \right],$$

mit

$$V(x_1, \dots, x_n) = \int_{\Pi_n} \max_i \left(\frac{w_i}{x_i} \right) dH(w),$$

wobei H ein positives endliches Maß ist, somit ist

$$\int_{prod_n} w_i dH(w) = 1$$

wobei noch gilt

$$\prod_n = \left\{ w \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^n w_i = 1 \right\}$$

Neben der oberen Grenze von Frechet-Hoeffding zählt auch noch die Gumpel-Copula zu den Extremwert-Copulas.

3.4 Anwendung von Copulas

Eine wichtige Anwendung von Copulas besteht in der Simulation von zufälligen Variablen mit verschiedenen Abhängigkeitsstrukturen. Dies dient als Voraussetzung zur Durchführung einer Monte-Carlo Studie, denn so können Copulas verwendet werden um Stresstest und Robustheitsprüfungen durchzuführen. Diese sind besonders bei Krisen, bei denen extreme Nachteile auftreten können, von sehr großer Bedeutung. Ein Beispiel für solch ein Ereignis wäre die globale Finanzkrise, welche sich zwischen 2007 und 2008 ereignet hat. In diesem Kapitel präsentieren ich nun verschiedene Algorithmen für Simulationen von Zufallsvariablen, aber vorher möchte ich noch kurz auf die Monte-Carlo Studien und Stresstests eingehen.

3.4.1 Monte-Carlo Studie

Tagtäglich steht man vor verschiedenen Ungewissheiten und Veränderlichkeiten, oder zusammengefasst Risiken. Auf Basis von diesen Risiken müssen dann Entscheidungen getroffen werden. Obwohl wir uns jetzt in einem Zeitalter befinden, in dem es möglich ist, auf alle vorhandenen Information zuzugreifen, ist es trotzdem noch immer nicht im Bereich des Möglichen die Zukunft exakt vorherzusagen.

Die Monte-Carlo Studie wird auch Monte-Carlo Simulation genannt und ist ein Verfahren aus der Stochastik. Diese Simulation stellt alle möglichen Entscheidungsergebnisse dar und zusätzlich werden auch die entsprechenden Risiken abgeschätzt. Es werden im Prinzip alle möglichen Ergebnisse dargestellt, welche durch die verschiedenen Handlungsweisen des Entscheidungsträger entstehen können. Dadurch ist es selbst in schwierigen Situationen möglich effizientere Entscheidungen zu treffen. Daher findet die Monte Carlo Studie nicht nur im Finanzbereich großen Anklang sondern auch in der Versicherungsbranche, Forschung oder Umwelttechnik.

Die Basis dieser Simulationen bilden eine große Anzahl gleichartiger Zufallsexperimente. Diese Zufallsexperimente können real durchgeführt werden, zum Beispiel durch einfaches Würfeln, oder auch durch Computerberechnungen. Bei der Computerberechnung werden geeignete Zufallszahlen erzeugt. Neben den Zufallsexperimenten dient das Gesetz der großen Zahlen als Grundlage. Ein Nachteil dieser Methode besteht allerdings darin, dass die gewonnenen Ergebnisse der Simulation nur für die betrachteten Szenarien, welche die Basis dieser Studie bilden, anwendbar sind.

3.4.2 Stresstest

Stresstests sind bei Kreditinstituten oder Versicherungsgesellschaften teilweise gesetzlich vorgeschrieben. Aus diesem Grund stellt sich nun die Frage wozu diese Stresstests eigentlich dienen.

Zusammengefasst dienen Stresstest dazu das Risiko bei extremen Ereignissen zu bewerten, wobei diese nur eine geringe Eintrittswahrscheinlichkeit besitzen. Dadurch soll es ermöglicht werden die Verlustanfälligkeit von verschiedenen Unternehmen in speziellen Situationen zu bestimmen, und um zusätzlich im Fall des Falles rechtzeitig Gegenmaßnahmen zu treffen. Zum Beispiel wird dadurch überprüft, ob ein Kreditinstitut, bei Eintritt eines bestimmten Ereignisses noch immer dazu in der Lage ist seine aufsichtsrechtlichen Liquiditäts- und Eigenkapitalvorschriften zu erfüllen.

Die Ergebnisse eines durchgeführten Stresstests werden durch sehr viele verschiedene Faktoren sehr stark beeinflusst. Oft ist es sehr schwierig die gewonnene Resultate richtig zu interpretieren. Ein wesentlicher Grund dafür ist, dass in der Praxis die Simulation von vielen verschiedenen Szenarien gleichzeitig durchgeführt werden und dadurch entsteht simultan eine große Anzahl an unterschiedlichen Ergebnissen und diese erschweren wesentlich den Erkenntnisgewinn des Stresstests. Oft werden auch die Eintrittswahrscheinlichkeit von den jeweiligen angenommen Szenarien nur grob und damit unzureichend bestimmt. Daher müssen die Erkenntnisse eines Stresstest stets kritisch betrachtete werden. Nichts desto trotz sollten trotzdem immer konkrete Maßnahmen geplant werden auf Basis der Resultate des durchgeführten Stresstests.

3.4.3 Simulation von Zufallsvariablen definiert durch elliptische Copulas

Die Simulation von Zufallsvariablen, dessen Abhängigkeiten beschrieben werden durch eine elliptische Copula, ist relativ einfach.

Will man einen n -dimensionalen Vektor $X = (X_1, \dots, X_n)$ simulieren, wobei unser Copula ein n -Gauss-Copula mit der Korrelationsmatrix p ist, muss man nur eine der nächsten zwei Algorithmen anwenden, welche wie folgt funktionieren:

Algorithmus 1:

1. man erzeugt n unabhängige standard- Gauss-Zufallsvariablen $u = (u_1, \dots, u_n)$ durch Verwendung des Box-Müller Verfahren.²
2. man muss die Cholesky-Zusammensetzung von p finden: $p = A \cdot A^T$, wobei A eine eindeutige reguläre untere Dreiecksmatrix ist.
3. jetzt setzt man $y = A \cdot u$
4. jetzt wird noch x_i ermittelt durch $x_i = \phi(y_i)$, $i = 1, \dots, n$ wobei ϕ eine univariate standard Gauss-Verteilung beschreibt.

Will man nun einen n -dimensionalen Zufallsvektor erzeugen, wobei wir nun eine wesentlich kompliziertere Copula als vorher haben, ist es sehr hilfreich zu wissen, dass jeder beliebige elliptisch verteilte Zufallsvektor X die folgende stochastische Darstellung erfüllt:

$$X = R \cdot N$$

Wobei N ein Gauss-Vektor mit Kovarianz Matrix \sum^2 und R eine positive Zufallsvariable unabhängig von N .

Der nächste Algorithmus zeigt wie ein n -dimensionaler Zufallsvektor erzeugt wird, wobei die Abhängigkeit jetzt durch ein Student-Copula beschrieben wird mit Freiheitsgrad v und shape Matrix p , hierfür ziehen wir nun die vorher vorgestellte stochastische Darstellung zu Hilfe.

2

Box-Müller Verfahren:

Sind U_1 und U_2 unabhängige, auf $(0, 1)$ uniform (gleichverteilt) verteilte sGn, so sind:

$$X = (-2 \ln U_1)^{(1/2)} \cos(2\pi U_2)$$

$$Y = (-2 \ln U_1)^{(1/2)} \sin(2\pi U_2)$$

unabhängige standardnormalverteilte sGn. Dies ist die Box-Müller-Methode zur Erzeugung von (standard)normalverteilten Zufallszahlen.

Algorithmus 2:

1. sowie beim ersten Algorithmus erstellen wir als erstes wieder unabhängige standard-Gauss-Zufallsvariablen $u = (u_1, \dots, u_n)$
2. wieder wird die Cholesky-Zusammensetzung von p gesucht: $p = A \cdot A^T$
3. man setzt nun $z = A \cdot u$
4. jetzt erstellt man eine Zufallsvariable r , unabhängig von $z = (z_1, \dots, z_n)$ und mit einer Chi-Quadrat-Verteilung \mathcal{X}^2 mit Freiheitsgrad v ³
5. jetzt setzt man $y = \sqrt{v \cdot r^{-1}} \cdot z$
6. abschließend wird noch x_i ermittelt, $x_i = T_v(y_i)$, $i = 1, \dots, n$. Wobei T_v eine univariate Student-Verteilung mit Freiheitsgrad v beschreibt.

Es ist sehr schwierig die Zufallsvariable R für die meisten elliptischen Verteilungen zu erhalten, aus diesem Grund führen wir nun einen neuen generellen Algorithmus ein, welcher um einiges hilfreicher ist, für die Simulation von Zufallsvariablen mit Hilfe von Copulas.

3.4.4 Simulation von Zufallsvariablen beschrieben durch glatte Copulas

Die neue generelle Methode basiert auf der einfachen Tatsache

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n] &= \mathbb{P}[U_n \leq u_n | U_1 = u_1, \dots, U_{n-1} \leq u_{n-1}] \\ &\quad \times \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, \dots, U_{n-1} \leq u_{n-1}], \end{aligned}$$

dies führt uns mittels Rekursion auf

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n] &= \mathbb{P}[U_n \leq u_n | U_1 = u_1, \dots, U_{n-1} \leq u_{n-1}] \\ &\quad \times \mathbb{P}[U_{n-1} \leq u_{n-1} | U_1 = u_1, \dots, U_{n-2} \leq u_{n-2}] \\ &\quad \vdots \\ &\quad \times \mathbb{P}[U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1] * \mathbb{P}[U_1 \leq u_1] \end{aligned}$$

3

Chi-Quadrat-Verteilung mit Freiheitsgrad v :

$$\begin{aligned} X \sim \mathcal{X}^2(v) : f(x) &= \frac{x^{v/2-1} e^{-x/2}}{\Gamma(v/2) 2^{v/2}}, \quad x > 0 \\ \mathbb{E}(X) &= v \quad \text{Var}(X) = 2v \end{aligned}$$

Wenn man nun diese Argumentation auf ein n-Copula anwendet, und man mit C_k das Copula für die ersten k -Variablen bezeichnet, ergibt dies nun

$$C(u_1, \dots, u_n) = C_n(u_n|u_1, \dots, u_{n-1}) \dots C_2(u_2|u_1) * \underbrace{C_1(u_1)}_{u_1},$$

wobei wir zusätzlich noch definieren

$$C_k(u_k|u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\partial_{u_1} \dots \partial_{u_{k-1}} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial_{u_1} \dots \partial_{u_{k-1}} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}.$$

Dies führt uns nun zur folgenden Simulation für n Zufallsvariablen mit Copula C.

Algorithmus 3:

1. man erstellt n uniforme-unabhängige-Zufallsvariablen v_1, \dots, v_n
2. man setzt nun $u_1 = v_1$
3. $u_2 = C_2^{-1}(v_2|u_1)$
- ⋮
- n+1. $u_n = C_n^{-1}(v_n|u_1, \dots, u_{n-1})$

Dieser Algorithmus ist besonders effizient wenn man einen archimedischen Copula annimmt.

Es wurde gezeigt, dass in so einem Szenario, es sehr einfach ist Paare von Zufallsvariablen zu erstellen, wobei die Verteilungsfunktion gegeben ist durch ein Copula C mit Generator ϕ . Dadurch kann man den vorher vorgestellten Algorithmus vereinfachen. Dies wiederum führt uns zu folgender Simulation.

Algorithmus 4:

1. man erstellt zwei uniforme-unabhängige-Zufallsvariabel v_1 und v_2
2. jetzt setzt man $u_1 = v_1$
3. $u_2 = \phi^{[-1]} \left[\phi \left(\phi'^{-1} \left(\frac{\phi'(u_1)}{v_2} \right) \right) - \phi(u_1) \right].$

Wenn man nun diesen vereinfachten Algorithmus anwendet mit Hilfe eines Frank-Copulas, führt uns dies zu folgenden Algorithmus:

Algorithmus 5:

1. man erstellt zwei uniforme-unabhängige-Zufallsvariable v_1 und v_2
2. jetzt setzt man $u_1 = v_1$
3. $u_2 = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{v_2(e^{-\theta}-1)}{v_2+(1-v_2)e^{-\theta v_1}} \right)$.

Wenn man die Abhängigkeit zufälliger Variablen simuliert, ist dieser Ansatz geeigneter für n-Copulas mit $n > 2$, weil der Algorithmus basierend auf der Inversen der bedingten Copula ganz schnell unlösbar werden kann für große n .

4 Zusammenfassung

Um diese Seminararbeit abzuschließen, möchte ich noch die wichtigsten Inhalte kurz zusammenfassen.

Im ersten Teil dieser Arbeit wird auf die einheitliche Bewertung von Risiken eingegangen, basierend auf der Arbeit von Föllmer und Schied. Weiters wurden in diesem Teil noch diverse Vereinfachungen und Ergänzungen vorgestellt. Nichts desto trotz sollte man im Hinterkopf behalten, dass es bis heute noch immer keine allgemein gültige Lösung gibt und daher die Resultate mit Bedacht betrachtet werden sollten.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit sehr hilfreichen Funktionen für den Finanzsektor, den sogenannten Copulas. Neben der Definition, Eigenschaften und verschiedenen Familien von Copulas wird auch noch genauer auf deren Anwendung eingegangen. Besonders auf die verschiedenen Möglichkeiten der Erzeugung von Zufallsvariablen .

Obwohl dieses Thema sehr umfangreich ist, hoffe ich dass diese Arbeit einen kurzen aber doch informativen Einblick ermöglicht.

5 Literaturverzeichnis

- [1] Y. Malevergne, D. Sornette (2006) : *Extreme Financial Risks*, Springer-Verlag
- [2] W. Gurker (2016): *Angewandte Mathematische STATISTIK*, Vorlesungsskript
- [3] W. Auzinger, O. Koch, D. Praetorius (2016): *Numerische Mathematik*, Vorlesungsskript
- [4] Allais-Paradoxon:
[http : //wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/allais-paradoxon.html](http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/allais-paradoxon.html) (10.02.2017)
- [5] Allais-Paradoxon:
[https : //de.wikipedia.org/wiki/Allais - Paradoxon](https://de.wikipedia.org/wiki/Allais-Paradoxon) (10.02.2017)
- [6] Unabhängigkeitsaxiom:
[http : //wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/unabhaengigkeitsaxiom.html](http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/unabhaengigkeitsaxiom.html) (10.02.2017)
- [7] Copula (probability theory):
[https : //en.wikipedia.org/wiki/Copula_\(probability_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Copula_(probability_theory)) (13.01.2017)
- [8] Monte Carlo-Simulation:
[http : //www.palisade.com/risk/de/monte_carlo_simulation.asp](http://www.palisade.com/risk/de/monte_carlo_simulation.asp) (13.02.2017)
- [9] Stresstest:
[http : //wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/stresstest.html](http://wirtschaftslexikon.gabler.de/Definition/stresstest.html) (13.02.2017)