Technische Universität Wien

Seminararbeit
Finanz- und Versicherungsmathematik

A stylized model for wealth distribution

Jimmy XUE

28. Februar 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Diese Arbeit beschäftigt sich mit Vermögensverteilung, deren genaue Definition und wie sie in unterschiedliche Kategorien gegliedert werden können. Zudem schauen wir uns die unterschiedlichen Verteilungsmaße. Darüber hinaus wird hier ein Blick auf die Verteilung der derzeitige Situation geworfen. Genaue Ursachen und mögliche Lösungswege sind zudem ein weiteres Kapitel dieser Arbeit.

Des weiteren wird eine Konstruktion eines einfachen Verteilungsmodells vorgestellt. Das Grundwissen über die Konstruktion beruht größtenteils auf das Paper "A stylized model for wealth distribution" von B. Düring, N. Georgiou und E. Scalas.

Die Arbeit sollte die wichtigsten Fakten und Daten beinhalten. Einen Eindruck von der aktuellen Situation über die Vermögensverteilung und Vermögenspolitik soll weitgehend in dieser Arbeit verschafft werden. Die mathematischen Aspekte wurden so einfach wie möglich gehalten. Die Notationen und Definitionen wurden größtenteils aus dem zitieren Werk übernommen.

2 Vermögensverteilung

Die Vermögensverteilung befasst sich mit der Aufteilung des Vermögens bei Personengruppen, die nach sozialen Schichten, Herkunft und anderen Eigenschaften unterschieden werden. Anders als die Einkommensverteilung, die sich mit reinen Einkommen aus der Volkswirtschaft, Erträge aus Arbeit und Kapital befasst, wird in der Vermögensverteilung nur Sach-, Geld- und Beteiligungsvermögen zur Berechnung hinzugezogen. Des weiteren ist die Vermögensverteilung weitaus ungleicher als die Einkommensverteilung und wächst stetig an.

2.1 Definitionen

- Das Vermögen einer natürlichen Person setzt sich aus den Gütern mit ökonomischen Wert zusammen, die die Person besitzt; deren Verteilung ist die Vermögensverteilung.
- Das Einkommen dagegen bezeichnet den Zustrom von Gütern mit ökonomischen Wert in einem bestimmten Zeitraum; deren Verteilung ist die Einkommensverteilung.

2.2 Sektorale Vermögensverteilung

Die sektorale Vermögensverteilung ist die Folgerung der Rechnung basierend auf die unterschiedlichen Wirtschaftssektoren. Ermittelt wird die Verteilung des Gesamtvermögens einer Volkswirtschaft auf einzelne Wirtschaftssubjekte (Privathaushalt, Unternehmen und der Staat), bis hin zu den einzelnen Wirtschaftszweigen.

2.3 Personale Vermögensverteilung

In der personalen Vermögensverteilung werden einzelne Personen und Personengruppen, gegliedert in unterschiedlichen Kategorien, in die Vermögensrechnung eingezogen.
Folgende Aspekte können als Gliederung dienen:

- Alter, Generation, Geschlecht
- Vermögensklassen
- Staaten und Regionen
- berufliche Qualifikation, sozioökonomische Gruppen
- Vermögensarten

Durch Unterschiedliche Gliederungen lassen sich verschiedene Fragenstellungen beantworten. Die Gliederung nach Staaten und Regionen, dient dem Vergleich unterschiedlicher Staaten, Regionen, Kulturkreisen und Wirtschaftssystemen. Durch Einteilung nach Alter, Generationen und Geschlecht lassen sich die Ursachen der Vermögensschichtung anschaulicher erklären. Die Unterteilung in verschiedenen Vermögensklassen zeigt, dass die Vermögen nicht gleich verteilt sind, sondern eine Vermögenskonzentration in der oberen Quantile besteht. Diese Gliederung ist die üblichste in Wissenschaft und Politik. Des weiteren lassen sich Phänomene wie Inflation, Wirtschaftswachstum, die Auswirkungen an der Vermögensverteilung haben, durch Gliederung nach Vermögensarten analysieren.

3 Verteilungsmaße

Um den Grad einer Ungleichverteilung vom Gesamtvermögen zu messen gibt es Verteilungsmaße. Die Größen auf der einen Seite sind die zu messenden Ressourcen wie Vermögen oder Einkommen und auf der anderen Seite die Personen, die über einen Anteil verfügen. Verteilungsmaße messen die Abweichungen der tatsächlichen Verteilung von einer Gleichheit.

3.1 Hoover-Ungleichverteilung

Die einfachste aller Verteilungsmaße ist die Hoover-Ungleichverteilung. Sie gibt an, wieviel vom gemessenen Gesamtvermögen umverteilt werden muss um eine Gleichverteilung zu erreichen. Die Hoover-Ungleichverteilung gibt 0 (oder 0%) für völlige Gleichverteilung beziehungsweise 1 (oder 1%) für maximale Ungleichverteilung.

Die Formel für die Hoover-Ungleichverteilung lautet:

Sei N Anzahl der Bereiche die durch Quantilen abgegrenzt sind. Sei E_i der i-te Anteil am Gesamtvermögen und A_i die Anzahl der Vermögensbesitzer vom i-ten Teil des Gesamtvermögens. E_{gesamt} sei die Aufsummierung der Anteile des Vermögens und A_{gesamt} die Summe alle Vermögensbesitzer. Dann ist die Hoover-Ungleichung:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} |\frac{E_i}{E_{gesamt}} - \frac{A_i}{A_{gesamt}}|$$

Wird das Volkseinkommen mit der Hoover-Ungleichverteilung multipliziert, dann ergibt sich der Anteil des Volkseinkommens, der insgesamt bewegt werden müsste, wenn eine völlige Gleichverteilung mit minimalem Aufwand durchgeführt werden sollte.

3.2 Theil-Index

Aus der Familie der Entropiemaße kommt der Theil-Index. Der Theil-Index gibt die Differenz zwischen einer sich bei Gleichverteilung einstellenden maximalen Entropie und einer sich aus einer Ungleichverteilung ergebenden aktuellen Entropie an.

Der Theil-Index ist 0 bei völliger Gleichverteilung und 1 bei einer Ungleichverteilung, wenn 17.6% von Vermögensbesitzer über 82.4% vom Gesamtvermögen verfügen und umgekehrt 82.4% der Besitzer über 17.6% des Vermögens besitzen. Bei einer höheren Ungleichverteilung ist der Theil-Index größer als 1.

Es gibt zwei Arten vom Theil-Index. Mithilfe des Theil-T-Index wird die Verteilung von Menschen zu Vermögen gemessen und der Theil-L-Index beschreibt wiederum die

Verteilung von Vermögen zu Menschen.
Die Formel für den Theil-Index lautet:

Sei n die Anzahl der Personen mit Vermögen $y_1, ..., y_n$ und damit das Durchschnittseinkommen $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$.

$$T_T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\frac{y_i}{\mu} * ln\frac{y_i}{\mu})$$
$$T_L = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(ln\frac{\mu}{y_i})$$
$$T_L(y) = T_T(\frac{1}{y})$$

Die Normierung der Theil-Indizes in den Bereich zwischen 0 und 1 (beziehungsweise zwischen 0 % und 100 %) erfolgt mit der Operation $1 - e^{-T}$.
Wird das Volkseinkommen mit dem Theil-L-Index multipliziert, dann ergibt sich der Anteil des Volkseinkommens, der insgesamt bewegt werden würde, wenn eine völlige Gleichverteilung

3.3 Gini-Koeffizient

Der am häufigsten angewendete und bekannteste Verteilungsmaß ist der Gini-Koeffizient. Aus der Lorentzkurve abgeleitet, nimmt der Gini-Koeffizient einen Wert zwischen 0 (bei gleichmäßiger Verteilung) und 1 (maximaler Ungleichheit) an.

Die Lorentzkurve stellt als Funktion, welche Anteile der gesamten Merkmalssumme auf welche Anteile der Grundmenge mit Merkmalsträgern entfallen dar. So wird auf der x-Achse die Anteile der Merkmalsträger (Bevölkerung) und auf der y-Achse die Anteile der Merkmalssummen (Vermögen) dargestellt. Der Gini-Koeffizient ist die auf die Gleichverteilung normierte Fläche zwischen den Lorentzkurven einer Gleichverteilung und der beobachteten Verteilung.

$$G = \frac{A_g - A_{ug}}{A_g}$$

mit G als Gini-Koeffizient, A_g der Fläche unter der Lorentzkurve einer Gleichverteilung und A_{ug} der Fläche unter der Lorentzkurve einer beobachteten Gleichverteilung.
Der Gini-Koeffizient entspricht dem Verhältnis der Fläche zwischen Diagonale und Lorentzkurve zu der Fläche zwischen Diagonale und x-Achse.

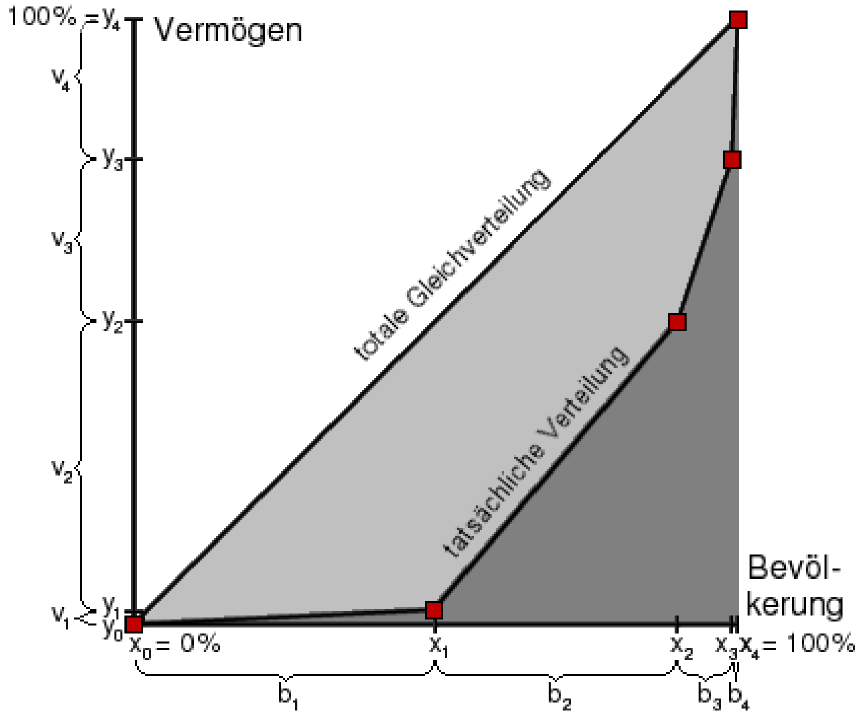

Abbildung 1: Lorentzkurve einer tatsächlichen Verteilung, Quelle: Wikipedia

4 Ursachen einer Ungleichheit

4.1 Lebenszyklus

Das Leben eines Menschen lässt ist in Abschnitte unterteilen, die sich im Anschaffungsprozess von Vermögen unterscheidet. In Kindheits- und Jugendalter hat eine Person kaum bis wenig Möglichkeiten Vermögen anzuschaffen und im Normalfall besitzt man in der Zeit auch kein Vermögen. Ab dem Arbeitsalter beziehungsweise Erwachsenenalter kann das Vermögen ansteigen und mit Beginn des Rentenalters sinkt das Vermögen wieder, oft auch in Verbindung mit Vermögensübertragung an die nächste Generation.
Bedingung für den Anschaffungsprozess ist eine geeignete Einkommenssituationen, die wiederum mit berufliche Qualifikation, berufliche Stellung und Einkommen zusammenhängt.

4.2 Erbschaften und Schenkungen

Mit Aufkommen des Kapitalismus ist das Zinseinkommen aus Kapital um ein Vielfaches rentabler als das Einkommen aus Erwerbsarbeit. Bezieher hoher Einkommen sind im Stande, sich selbst hohe Einkommen zu verschaffen. Die relative Höhe der Einkommen gegenüber niedrigeren Einkommen entspricht meist nicht der jeweiligen Produktivität. Einkommen aus Kapital wachsen im Kapitalismus in der Regel prozentuel stärker als die Gesamtwirtschaft.
Insbesondere spielt bei hohen Vermögenskonzentrationen die geringe Besteuerung von Zinseinkommen und Erbschaften beziehungsweise die Nichtbesteuerung von Vermögen eine wesentliche Rolle im Wachstum der Vermögensungleichverteilung.
Die Einführung einer Erbschaftssteuer würde im Sinne einer gerechteren Verteilung, eine tragende Rolle spielen. Erbschaften gehören zu Vermögenszuwächse, ist jedoch keine Leistung, die gegenüber Erwerbsarbeit steuerlich begünstigt werden sollte.

4.3 Erfassung von Vermögen

Schon in der Erhebung von statistischen Daten der Vermögensverteilung treten Probleme auf. Einerseits sind erhebliche Anteile von Vermögen in Steueroasen versteckt und andererseits ist oftmals eine Auflistung von Sachwerten schwer zu erreichen.
Man kann davon ausgehen, dass die Vermögensungleichheit weitaus ungleicher, als die Untersuchungen ergeben, weil in allen Studien über die Ungleichheit Vermögen der reichsten Menschen unterschätzt werden.

Ein weiteres Problem ist die Teilnahmebereitschaft bei Bevölkerungsumfragen und die oftmals falsche Selbsteinschätzung. In der Regel verschätzen sich die meisten Haushalte, und zwar zur Mitte verzerrt. Die meisten sehr vermögenden Haushalte schätzen sich als relativ weniger vermögend ein, und die weniger vermögenden schätzen sich relativ vermögender als sie es tatsächlich sind. Die wahrgenommene Vermögensungleichheit erweist sich deutlich geringer als die Ungleichheit aus erhobenen Daten.

Nicht unerhebliches Problem stellt die genaue Erfassung von Marktwerten, insbesondere von vor längerer Zeit ererbte oder gekaufte Sachwerte und auch bei Betriebsvermögen. Oft außer Achte gelassen und schwer einschätzbar, sind Bodenschätze, Grund und Boden, Kunstwerke, immaterielle Vermögensgegenstände wie Patente und Lizenzen.

5 Vermögensverteilung global

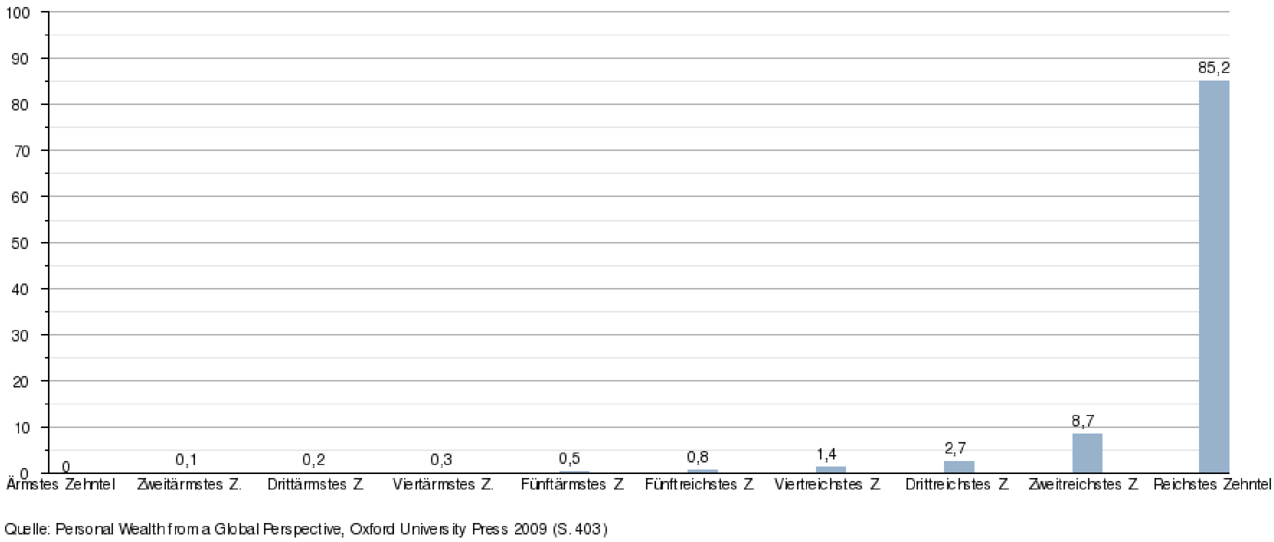

Abbildung 2: Globale Vermögensverteilung, Quelle: Wikipedia

Der Gini-Koeffizient für weltweite Vermögensverteilung schwankt je nach Studie zwischen 0.8 und 0.92. Laut einer Studie aus dem Jahre 2000 besitzt das reichste Prozent der Weltbevölkerung 40% des Weltvermögens. Die reichsten 10% besaßen zusammen 85% des Weltvermögens, die ärmeren 50% zusammen nur 1%.
Die Ungleichheit hat in den letzten 20 Jahren zugenommen. Nach Oxfams Berechnungen besitzen im Jahr 2014 die reichsten 85 Menschen genau die Hälfte des Weltbestands. Mit 2017 beläuft sich der Bestand der 8 reichsten Menschen auf 426,2 Milliarden US$, was den Besitz der ärmsten 50% der Weltbevölkerung mit 409,1 Milliarden US$ weit übertrifft.

Tabelle 1: Beispiele für Vermögensverteilungen in Nationen

Land	Gini-Index (2015)	Vermögen in USD (Mittel)	Vermögen in USD (Median)
Global	*91,5*	*52.432*	*3.210*
Russland	91,2	11.726	1.388
USA	85,0	352.996	49.787
Brasilien	83,0	17.597	3.311
Schweiz	80,3	567.122	107.583
Österreich	**78,0**	**81.266**	**22.903**
Deutschland	77,5	177.984	43.898
China	73,3	22.513	7.357
UK	67,8	320.368	126.472

6 Vermögensverteilung in Österreich

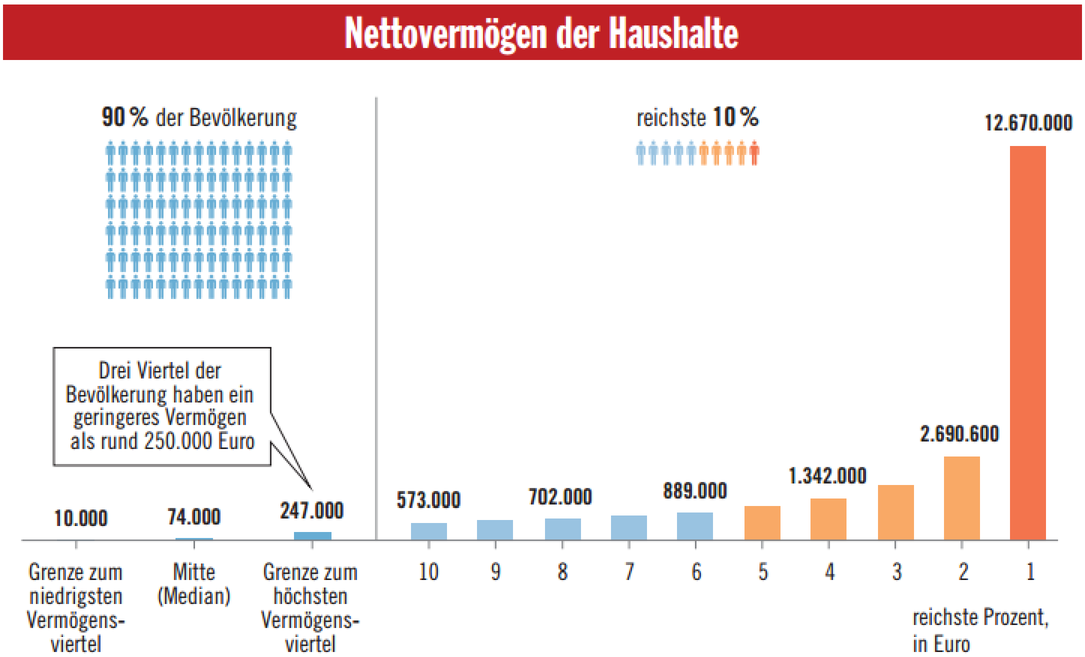

Abbildung 3: Verteilung in Österreich, Quelle: Arbeitskammer

Der Gini-Koeffizient beläuft sich in Österreich zwischen 0.75 und 0.8. Das heißt, die reichsten 10% verfügen über 69% des Gesamtvermögen in Österreich. Das Netto-Gesamtvermögen ist 1.25 Billionen Euro schwer.
Die ärmere Hälfte in Österreich verfügt über weniger als 74.000 Euro, für dreiviertel der Bevölkerung ist die obere Grenze 247.000 Euro. Großteil der österreichischen Bevölkerung besitzt Vermögen in Form von einem Eigenheim, Auto und eigenen Ersparnissen.
Mit einem durchschnittlichen Nettovermögen von 12,7 Millionen Euro ist das reichste Prozent enorm vermögend.

Eine große Bedeutung für die wachsende Ungleichheit sind Erbschaften und Schenkungen. Größere Vermögen lassen sich erst durch Vererbung über Generationen hinweg aufbauen. Von den reichsten 10 Prozent erhielten über zwei Drittel (72%) Erbschaften. Reiche Haushalte erbten nicht nur öfter, sondern auch mehr. Im Durchschnitt erhielten die reichsten 10% etwa 310.000 Euro, während das Erbe für die vermögensärmsten 40% im Schnitt 17.000 Euro.
Mit einem Gini-Koeffizienten von 0,89 sind Erbschaften extrem ungleich verteilt – noch deutlich ungleicher als das Gesamtvermögen. Die ungleiche Steuerbelastung von Einkommen aus Arbeit gegenüber Kapitaleinkommen sowie der unverhältnismäßig geringe Beitrag von hohen Vermögen verstärken die Verteilungsungleichheit zusätzlich.

6.1 Mögliche Gegenmaßnahmen

- Eine Umstrukturierung des Steuersystems. Denn Vermögen in Österreich werden niedrig bis gar nicht besteuert. Während Arbeit im internationalen Vergleich hoch besteuert wird.
- Vermögenssteuer auf hohe Vermögen. Große Vermögen müssen einen fairen Beitrag leisten.
- Einführung einer Erbschafts- und Schenkungssteuer. Erbschaften sind Vermögenszuwächse wie andere Einkommen auch, und fallen damit unter eine Einkommenssteuerbesteuerung im weiteren Sinne. Erben ist keine Leistung, die gegenüber Arbeit steuerlich begünstigt werden sollte.

7 Verteilungsmodell

Für die Konstruktion eines Verteilungsmodells, nehmen wir an, dass wir N *economic agents*, jeden mit einem Bestand $W_i \geq 0$ ausstatten. Sei $W = \sum_{i=1}^{N} W_i$ das gesamte Vermögen aus der Menge der *agents* und wir betrachte Zufallsvariable W_i als Bestand des *agents* i.
Von Interesse ist jetzt, welche Verteilung der Vektor $(W_1, ..., W_N)$ hat und wie die Randverteilung W_1 ist, wenn alle *agents* den selben Bestand haben?

Als ersten normalisieren wir den total Bestand sodass der gleich eins ist, mithilfe der Transformation:

$$X_i = \frac{W_i}{W}$$
$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

Der Vektor $(X_1, ..., X_N)$ ist eine endliche zufällige Partition des Intervalls $(0, 1)$.

Folgende Bemerkung sind nützlich und vereinfachen die Konstruktion.

- Aufgrund von Verschuldung kann ein Bestand W_i einen negativen Wert annehmen. In diesem Fall, kann man den Bestand auf ein nicht-negativen Wert verschieben, indem man den negativen Wert vom höchsten Absolutbetrag abzieht.
- Eine Mengenpartition ist eine endliche Folge $S = (s_1, s_2, ...)$, sodass $s_1 \geq s_2 \geq ... \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{\infty} s_i \leq 1$.
- Eine zufällige und endliche Partition eines Intervalls kann in eine Mengenpartition transformiert werden, indem man die Elemente der Größe nach ordnet und endlichen Folgen von Nullen aufsummiert.

Der Vektor $(X_1, ..., X_N)$ liegt im $N-1$-dimensionalen Simplex Δ_{N-1}

Definition: (Simplex)

$$\Delta_{N-1} := \left\{ x = (x_1, ..., x_N) : x_i \geq 0 \, \forall \, i = 1, ..., N \vee \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \right\}$$

Mit der neuen Definition stellt man sich folgende Fragen:
1. Was ist die Verteilung des Vektors $(X_1, ..., X_N)$ mit $X_i = \frac{W_i}{W}$?
2. Was ist die Verteilung der Zufallsvariable X_1, dem Anteil des Vermögens der einzelnen Individuums?

Um die Fragen beantworten zu können werden wir folgende Definition brauchen.

Definition: (Dirichlet-Verteilung)

Die Dirichletverteilung ist die multivariate Erweiterung der Beta-Verteilung. Ihr Dichtefunktion gibt die Wahrscheinlichkeiten von K verschiedenen Ereignissen an, wenn jedes Ereignis $\alpha_i - 1$ mal beobachtet wurde.

Ihre Dichtefunktion ist:

$$f(x_1, ..., x_K; \alpha_1, ..., \alpha_K) = \frac{1}{B(\alpha)} \prod_{i=1}^{K} x_i^{\alpha_i - 1}$$

$$\forall x_1, ..., x_{K-1} \geq 0 \text{ mit } x_1 + ... + x_{K-1} \leq 1 \text{ und } x_K = 1 - (x_1 + ... + x_{K-1})$$

$$\text{sowie } B(\alpha) = \frac{\prod_{i=1}^{K} \Gamma(\alpha_i)}{\Gamma(\sum_{i=1}^{K} \alpha_i)}, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_K)$$

Legt man $(W_1, ..., W_N)$ fest, sodass $W_i \sim gamma(\alpha_i, \lambda)$. Dann ist $W = \sum_{i=1}^{N} W_i \sim gamma(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i, \lambda)$.
Daraus folgt, dass $(X_1, ..., X_N)$ dirichlet-verteilt ist mit Dichte:

$$f_x(x) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + ... + \alpha_N)}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_N)} x_1^{\alpha_1 - 1} ... x_N^{\alpha_N - 1},$$
$$x = (x_1, ..., x_N) \in \Delta_N - 1$$

Somit ist $X \sim Dir_{N-1}(\alpha_1, ..., \alpha_N)$ und die Parameter $\alpha_1, ..., \alpha_N$ werden als positiv angenommen. Ein Spezialfall wäre, wenn $\alpha_1 = ... = \alpha_N = \alpha$, dann wird die Verteilung als symmetrische Dirichlet-Verteilung bezeichnet. Eine symmetrische Dirichlet-Verteilung mit $\alpha = 1$ ist gleichverteilt auf dem Simplex Δ_{N-a}

Mit folgendem Satz lassen sich unsere Fragen beantworten:

Satz

- Sei $(W_1, ..., W_N)$ Zufallsvektor mit unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen, sodass $W_i \sim exp(1)$. Dann ist $W = \sum_{i=1}^{N} W_i \sim gamma(N, 1)$.

- Definiere $X_i = \frac{W_i}{W}$, dann ist der Vektor $X = (X_1, ..., X_N)$ gleichverteilt auf dem Simplex Δ_{N-1} und besitzt eine Randverteilung $X_1 \sim beta(1, N-1)$ mit

$$f_{X_1}(x) = \frac{(1-x)^{N-2}}{B(1, N-1)}$$

mit $a, b > 0$ und $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Beweis

Sei W die Zufallsvariable $\sum_{i=1}^{N+1} W_i$.
Zu zeigen ist, dass $\frac{W_1}{W}, ..., \frac{W_N}{W}$ gleichverteilt auf dem SimplexΔ_{N-1} ist.

Seien w_i, y, x_i die Variablen zu den ZVs $W_i, W, \frac{W_i}{W}$.
Die letzte Komponente $\frac{W_{N-1}}{W}$ ist gleich 1 minus der Summe der ersten N Komponenten.
Zuerst wird die gemeinsame Dichte von $W_1, ..., W_N, W$ berechnet:

$$f(w_1, ..., w_N, y) = \prod_{i=1}^{N} e^{-w_i} e^{-(y-w_1-...-w_N)} = e^{-y}$$

gilt wenn $w_i \geq 0$ für alle i, und $w \geq \sum_{i=1}^{N} w_i$.

Die gemeinsame Dichte ist das Produkt der Dichten der ersten N Variablen und der Dichte von W, gegeben durch $W_1 = w_1, ..., W_N = w_N$.
Als nächstes wird durch Transformation der Variablen, die gemeinsame Dichte von $\frac{W_1}{W}, ..., \frac{W_N}{W}, W$ berechnet:

$$y^N f(x_1 y, ..., x_N y, y) = f(x_1, ..., x_N, y) = y^N e^{-y},$$
$$(x_i y \geq 0, \sum_{i=1}^{N} x_i y \leq y)$$

gegeben durch die Transformation $\{x_1 = \frac{w_1}{y}, ..., x_N = \frac{w_N}{y}, y = y\}$

Die Dichtefunktion von $\frac{W_1}{W}, ..., \frac{W_N}{W}$ wird berechnet, indem man die obrige Dichte nach dy integriert.

$$\int_0^\infty y^n e^{-y} dy \; \mathbb{1}_{\Delta_{N-a}}(x_1, ..., x_N) = n! \mathbb{1}_{\Delta_{N-a}}(x_1, ..., x_N)$$

Mithilfe der *aggregation property* der Dirichlet-Verteilung kann man auf die betaverteilte Randverteilung schließen

$$Wenn\ (X_1, ..., X_N) \sim Dir(\alpha_1, ..., \alpha_N), dann\ gilt$$
$$(X_1, ..., X_i + X_j, ..., X_N) \sim Dir(\alpha_1, ..., \alpha_i + \alpha_j, ..., \alpha_N)$$

Die eindimensionale Randverteilung ist $X_1 \sim beta(1, N-1)$, mit Dichte:

$$f_{x_1}(x) = \frac{(1-x)^{N-2}}{B(1, N-1)}$$

Damit wurde gezeigt, dass der Vektor $(X_1, ..., X_N)$ gleichverteilt auf dem Simplex Δ_{N-1} ist und die Randverteilung Betaverteilt ist.

7.1 Stochastische Modelle

Im nächsten Kapitel definieren wir drei ähnliche Modelle, die die zeitliche Entwicklung der Vermögensverteilung der Agenten bestimmt. Das erste Modell ist eine zeitdiskrete Markov-Kette mit diskreten Zustandsraum (DD - discrete time-discret space Markov-Chain). Um es einfach zu halten ist die invariante Verteilung gleichverteilt.

Das DD Modell wird zu einem zeitdiskreten Markov-Kette mit allgemeinen Zustandsraum (DC - discrete time-continious space Markov-Chain) verallgemeinert. Die Dynamik, Irreduzibilität und die invariante Verteilung der DC Modelle kann als Grenzfälle der DD Modelle betrachtet werden.

Im folgenden werden zwei Operatoren auf dem Simplex definiert:

Definition (Koagulation)
Unter Koagulation, bezeichnen wir das Vereinigen der Bestände von zwei oder mehr Agenten in einen einzigen Bestand.

Definition (Fragmentation)
Unter Fragmentation, bezeichnen wir die Aufteilung des Bestandes eines Agenten in zwei oder mehr Bestände.

7.2 Zeitdiskretes Modell mit stetigem Zustandsraum (DC)

Zuerst definieren wir das Hauptobjekt in dieser Arbeit: Das DC Modell.
Zu jeder Zeit, verändert sich der Zustand des Prozesses X aus Δ_{N-1} entsprechend der Zusammensetzung aus einem Koagulation und einem Fragmentations-Schritt.

Um es genauer zu betrachten, sei $X = x$ der aktuelle Wert der ZV X. Für jedes geordnetes Paar von Indizen $i, i, 1 \leq i, j \leq N$, gleichverteilt zufällig ausgewählt, definiere die Koagulationsfunktion $coag_{i,j}(x) : \Delta_{N-1}\Delta_{N-2}$ indem man einen neuen Agenten erzeugt mit Bestand $x = x_i + x_j$ während die Vermögensverhältnise der anderen unverändert bleiben. Als nächstes wird eine zufällige Fragmentationsfunktion $frag(x) : \Delta_{N-2} \to \Delta_{N-1}$ ausgeführt, diese nimmt das oben definierte x und spaltet es in 2 Teile wie folgt. Sei u aus $(0, 1)$ erzeugt aus der Gleichverteilung $U[0, 1]$, setze $x_i = ux$ und $x_j = (1 - u)x$.

Die Folge von Koagulations- und Fragmentationsoperatoren definiert eine Zeit-Homogene Markov Kette auf dem Simplex Δ_{N-1}. Sei $x(t) = (x_1(t), ..., x_i(t), ..., x_j(t), ..., x_N(t))$ der Zustand der Kette zum Zeitpunkt t mit i und j als bestimmten Indizes. Dann ist der Zustand zum Zeitpunkt $t + 1$ gleich

$$x(t+1) = (x_1(t+1), ..., x_i(t+1)) = u(x_i(t) + x_j(t)), ..., x_j(t+1) = (1-u)(x_i(t) + x_j(t)), ..., x_N(t)).$$

Der Übergangskern für diesen Prozess ist ausgeartet, weil jeder Schritt ein Lebesgue Mass 0 auf dem Simplex bestimmt.

7.3 Zeitdiskretes Modell mit diskreten Zustandsraum (DD)

Sei N die Anzahl von Kategorien in welche n Objekte klassifiziert sind. In diesem Zustand ist eine Liste $n = (n_1, ..., n_N)$ mit $\sum_{i=1}^{N} n_i = n$ welche die Anzahl an Objekten zugehörig zu jeder Kategorie angibt.

In diesem Rahmen wird ein Koagulationsschritt definiert durch Auswahl eines zufälligen Paares von ganzzahlige Indizes i, j und Erzeugung einer neuen Kategorie mit $n_i + n_j$ Objekte.
Ein Fragmentationsschritt nimmt diese Kategorie und splittet es in zwei neue Kategorien mit erneuter Indizierung mit i und j wobei n'_i ein gleich verteilter Zufallszahl zwischen 0 und $(n_i + n_j - 1) \vee 0$ und $n'_j = n_i + n_j - n'_i$ ist.

Der Zustand des Prozess am Zeitpunkt t wird mit $X(t)$ angeschrieben und der Zustandsraum ist ein ganzzahlig skalierter Simplex.

$$S_{N-1}^{(n)} = n\Delta_{N-1} \cap \mathbb{Z}^N = \left\{ n = (n_1, ..., n_N) : 0 \leq n_i \leq n, \sum_{i=1}^{N} n_i = n, n_i \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

Bemerkung: Man beachte, dass man eine leichte Asymmetrie definiert hat, da der erste Agent in Gefahr läuft ein Bestand mit 0 bekommt.

Formal bewegen wir uns mit der Koagulation vom Zustandsraum $S_{N-1}^{(n)}$ zu $S_{N-2}^{(n)}$ und mithilfe der Fragmentation zurück auf $S_{N-1}^{(n)}$. In dieser Arbeit sind wir nur am angehäuften Vermögen interessiert deshalb überspringen wir den Zwischenzustandsraum indem wir den Prozess nur auf $S_{N-1}^{(n)}$ definieren.

Die Übergangswahrscheinlichkeit für $X(t) : P\{X(t+1) = n' | X(t) = n\}$

$$= \sum_{i,j:i \neq j} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \left(\frac{\mathbb{1}\{n_i + n_j \geq 1, n'_j \geq 1\}}{n_i + n_j} + \mathbb{1}\{n_i + n_j = 0\} \right) \delta_{n_i + n_j, n'_i + n'_j} \prod_{k \neq i,j} \delta_{n'_k, n_k} \right\}$$

Die Notation beschreibt, dass über alle geordneten Paare (i, j) mit $i \neq j$ aufaddiert wird.

Die Kette ist zeit-homogen da der Übergang unabhängig von der Zeit t ist.
Es ist auch aperiodisch, da es eine positive Wahrscheinlichkeit gibt, dass in jedem Schritt, die Kette koaguliert und anschliessend in den selben Zustand fragmentiert.
Um das genauer zu beobachten, sei ein Vektor $(X_1, ..., X_N) = (x_1, ...x_N)$ im Simplex. Mindestens ein Eintrag ist nicht Null, sagen wir $x_1 > 0$. Der Index $i = 1$ (mit Wahrscheinlichkeit N^-1) wird als erstes ausgewählt und danach ein anderer Index j. Danach wird es fragmentiert in x_1, x_j (mit Wahrscheinlichkeit $1/(x_1 + x_j) < 0$).
Letztendlich ist die Kette irreduzibel, da sie mit positiver Wahrscheinlichkeit von jedem Zustand $X = (x_1, ..., x_N)$ einen benachbarten Zustand annehmen kann.
Zusammengefasst hat die Kette $X(t)$ eine eindeutige Gleichgewichtsverteilung π, welches wir anschliessend uns anschauen werden.

Satz

- Die invariante Verteilung der Markov-Kette $X(t)$ ist die Gleichverteilung auf $n\Delta_{N-1} \cap \mathbb{Z}^N$

Beweis

Definiere:

$$A_{i,j}(n') = \{n : n \to n'\}$$

sei die Menge aller Elemente n aus dem Simplex die in n' zuordnen, mittels Koagulations und Fragmentationsprozesses in den Indizen i, j.
Die Menge ist dann leer wenn $n'_j = 0$ während $n'_i \geq 1$, ansonsten enthält es mindestens einen Vektor.
Betrachte $A_{i,j}(n')$ als nicht leer, dann ist die Kardinalität

$$card(A_{i,j}(n')) = (n'_i + n'_j) \vee 1$$

Mithilfe dieser Notation, ist es uns möglich die Übergangswahrscheinlichkeit umzuschreiben.

$$P\{X(t+1) = n' | X(t) = n\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j:i\neq j} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \left(\frac{\mathbb{1}\{n_i + n_j \geq 1, n'_j \geq 1\}}{n_i + n_j} + \mathbb{1}\{n_i + n_j = 0\} \right) \delta_{n_i+n_j, n'_i+n'_j} \prod_{k\neq i,j} \delta_{n'_k, n_k} \right\} \\
&= \sum_{i,j:i\neq j} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \left(\frac{\mathbb{1}\{n'_i + n'_j \geq 1, n'_j \geq 1\}}{n'_i + n'_j} + \mathbb{1}\{n'_i + n'_j = 0\} \right) \delta_{n_i+n_j, n'_i+n'_j} \prod_{k\neq i,j} \delta_{n'_k, n_k} \right\} \\
&= \sum_{i,j:i\neq j} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{(n'_i + n'_j) \vee 1} \right) \delta_{n_i+n_j, n'_i+n'_j} \prod_{k\neq i,j} \delta_{n'_k, n_k} \mathbb{1}\{n \in A_{i,j}(n')\} \right\} \\
&= \sum_{i,j:i\neq j} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{card(A_{i,j}(n'))} \right) \delta_{n_i+n_j, n'_i+n'_j} \prod_{k\neq i,j} \delta_{n'_k, n_k} \mathbb{1}\{n \in A_{i,j}(n')\} \right\} \\
&= \sum_{i,j:i\neq j} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{card(A_{i,j}(n'))} \right) \mathbb{1}\{n \in A_{i,j}(n')\} \right\}
\end{aligned}$$

Nun fixiert man ein n' und addiert alle Übergangswahrscheinlichkeiten über n auf der letzten Zeile.
Dann erhalten wir:

$$\sum_n \sum_{i,j:i\neq j} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{card(A_{i,j}(n'))} \right) \mathbb{1}\{n \in A_{i,j}(n')\} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j:i\neq j} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{card(A_{i,j}(n'))} \right) \sum_n \mathbb{1}\{n \in A_{i,j}(n')\} \right\} \\
&= \sum_{i,j:i\neq j} \left\{ \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \left(\frac{1}{card(A_{i,j}(n'))} \right) card(A_{i,j}(n')) \right\} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Damit ist die Übergangsmatrix doppelt-stochastisch und insbesondere ist die invariante Verteilung gleichverteilt.

7.4 Kovergenz einer endlichen Markov-Kette

Eine ähnliche Schlussfolgerung im Fall des DC Modells ist weitaus komplizierter. Die Schwierigkeit liegt darin, dass die Zeit sich in diskreten Schritten bewegt und die Kette kann nicht den gesamten Zustandsraum zugeordnet werden, da Reelle Zahlen nicht abzählbar sind.
Um dennoch das Problem zu lösen, beginnen damit die Konvergenz der Markov-Kette mit endlichen Zustandsraum in Markov-Kette mit stetiger Zustandsraum zu untersuchen.

Sei $X^{(n)}$ ein DD Markov-Kette für Vermögen, wenn das Gesamtvermögen gleich n ist und sei $X^{(\infty)}$ die Kette des DC Modells definiert wie in 6.2. Wir skalieren die Zustandsräume, von jedem Prozesses $X^{(n)}$ sodass es eine Untermenge von Δ_{N-1} ist, indem wir einen neuen Prozess definieren :

$$Y^{(n)} = n^{-1} X^{(n)}$$

Der Zustandsraum von $Y^{(n)}$ ist der Simplex

$$\Delta_{N-1}(n) = \{(q_1, ..., q_d) : 0 \leq q_i \leq 1, q_1 + ... + q_d = 1, nq_i \in \mathbb{N}_0 \subset \Delta_{N-1}\}.$$

Es kann als Partition von Δ_{N-1} mit n^{-1} verknüpft betrachtet werden, das heißt es ist invers proportional zum Gesamtvermögen.
Zuerst zeigen wir die schwache Konvergenz der ein-dimensionalen Randverteilungen:

$$Y_k^{(n)} \Rightarrow X_k^{(\infty)}, \text{ für } n \to \infty, \forall k \in \mathbb{N}$$

danach zeigen wir die Existenz einer eindeutigen invarianten Verteilung für $X^{(\infty)}$ (DC-Modell) welches eine Gleichverteilung auf Δ_{N-1} ist.

Sei $\mu_0^{(n)}$ die Anfangsverteilung von $Y_0^{(n)}$ und $\mu_0^{(\infty)}$ die Anfangsverteilung von $X_0^{(\infty)}$. Dann gilt folgende Aussage:

Satz

- Angenommen $\mu_0^{(n)} \Rightarrow \mu_0^{(\infty)}$ konvergiert schwach für $n \to \infty$.
- Dann konvergiert für jedes k aus $\mathbb{N}$ die Randverteilungen $Y_k^{(n)} \Rightarrow Y_k^{(\infty)}$ für $n \to \infty$.

Beweis Ohne Beweis

Damit folgt aus $\mu_0^{(n)} \Rightarrow \mu_0^{(\infty)}$, die Konvergenz $\mu_1^{(n)} \Rightarrow \mu_1^{(\infty)}$. Durch Induktion und der Markov-Eigenschaft lässt sich die Konvergenz auf alle eindimensionalen Randverteilungen bestimmen.

8 Zusammenfassung

Die grundlegenden Daten und Fakten wurden in dieser Arbeit vermittelt, durch die Beispiele sollte nur ein kleiner Einblick in die momentane Lage gegeben sein.
Um das Problem der ungleichen Verteilung zu verstehen, müssen die Ursachen erkannt werden. Mit Einführung des Kapitalismus ist das Kapital, welches richtig investiert wird stetig am wachsen. Jede Person mit einem ausreichendem Startkapital, kann sich mit diesem ein größeres Einkommen verschaffen, während der durchschnittlich vermögende Mensch mit einem Durchschnittseinkommen nicht über die Grenzen der mittleren Schicht hinauskommt.
Die heutige Politik hat noch einen Standpunkt, der die Superreichen steuerlich begünstigt in Erbschaften und Kapitaleinkommen. Eine umfassende Reform und Umstrukturierung würde die Schieflage der Vermögensverteilung in eine gerechtere Position führen.
Erhebung von Daten und Analyse in den richtigen Verteilungsmodellen soll in der korrekten Durchführung von Änderungen und Anpassung des Steuersystems helfen.

Quellenverzeichnis

- http://www.wikipedia.org
- http://wien.arbeiterkammer.at
- http://www.verteilung.at
- http://www.oxfam.de

Literaturverzeichnis

(i) B. Düring, N. Georgiou und E. Scalas. A stylized model for wealth distribution, 2016

Abbildungsverzeichnis