Seminararbeit
Machine Learning for Financial Engineering
(Györfi, Ottucsák, Walk)

Felix Ostendorf

13. Januar 2018

Inhaltsverzeichnis

1 Portfolioselektion mit proportionalen Transaktionskosten

1.1 Mathematisches Setup: Investment mit proportionalen Transaktionskosten

Wir untersuchen ein Marktmodell, bestehend aus d Assets. Die zeitliche Entwicklung des Marktes sei durch eine Folge von Marktvektoren $s_1, s_2, \ldots \in \mathbb{R}_+^d$, wobei

$$\mathbf{s}_i = (s_i^{(1)}, \ldots, s_i^{(d)}),$$

gegeben, sodass die j-te Komponente $s_i^{(j)}$ von $\mathbf{s}_i$ den Preis des j-ten Assets am Ende der i-ten Handelsperiode darstellt mit $s_0^{(j)} = 1$
Des weiteren benötigen wir die Folge von Rendite-Vektoren $\{\mathbf{x}_i\}$ mit $\mathbf{x}_i = (x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(d)})$ und

$$x_i^{(j)} = \frac{s_i^{(j)}}{s_{i-1}^{(j)}}$$

Die j-te Komponente $x_i^{(j)}$ des Returnvektors $\mathbf{x}_i$ gibt den Betrag an, den man am Ende der i-ten Periode erhält, nachdem man eine Einheit in das j-te Asset investiert hat. Der Investor hat zu Beginn jeder Handelsperiode die Möglichkeit sein Portfolio gemäß dem Portfoliovektor $\mathbf{b} = (b^{(1)}, \ldots, b^{(d)})^T$ umzuschichten. Dabei gibt die j-te Komponente $b^{(j)}$ von $\mathbf{b}$ den Anteil vom Kapital des Investors an, welcher in das Asset j investiert wurde. In diesem Abschnitt werden wir annehmen, dass $\mathbf{b}$ keine negativen Komponenten hat und $\sum_{j=1}^{d} b^{(j)} = 1$ ist. Die Menge aller dieser $\mathbf{b} \in \mathbb{R}_+^d$ bezeichnen wir mit Δ_d. Die zweite Bedingung bedeutet, dass die Investmentstrategie selbstfinanzierend ist, das heißt, es gibt keine exogenen Zuflüsse oder Konsumationen. Die Nichtnegativität hat zur Folge, dass Leerverkäufe nicht möglich sind. Außerdem nehmen wir an, dass Assets beliebig teilbar und alle Assets in unbeschränkten Mengen zum aktuellen Preis in jeder Handelsperiode vorhanden sind. Das Verhalten am Markt soll auch nicht durch die Aktionen der Investoren, welche wir untersuchen, beeinflusst werden.
Zu Beginn wollen wir fortlaufende Investmentstrategien für Finanzmärkte in diskreter Zeit untersuchen, sodass in die Strategie Informationen der Vergangenheit des Marktes einfließen dürfen. Zu Beginn einer Handelsperiode wird ein Portfolio von den verfügbaren Assets bestimmt. Das Ziel ist es den Wohlstand langfristig zu maximieren.
Wenn S_0 das Anfangskapital des Investors bezeichnet, dann investiert dieser am Beginn der ersten Periode $S_0 b^j$ in das $j-$te Asset. Daher ist das Vermögen des Investors am Ende der ersten Periode $S_1 = S_0 \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} x_1^{(j)} = S_0 \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_1 \rangle$, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt bezeichnet. Für die zweite Periode ist S_1 das Startkapital und es gilt $S_2 = S_1 \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_2 \rangle = S_0 \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_1 \rangle \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_2 \rangle$. Durch Induktion folgt daher $S_n = S_{n-1} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_n \rangle = S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle$.
Durch Umschreiben in $S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle = S_0 e^{\sum_{i=1}^{n} \ln \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle} = S_0 e^{n W_n}$ mit der durchschnittlichen Wachstumsrate $W_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle$ folgt, dass die Maximierung von S_n äquivalent ist zur Maximierung von W_n. Das wachstumsoptimale Portfolio (auch Growth Optimal

Portfolio-GOP) ist als jenes Portfolio, welches die maximale erwartete Wachstumsrate hat, definiert.
Für $j \leq i$ schreiben wir im Folgenden $\mathbf{x}_j^i$ für die Matrix der Rendite Vektoren $(\mathbf{x}_j, \ldots, \mathbf{x}_i)$.
Eine Investmentstrategie ist eine Folge $\mathbf{B}$ von Funktionen

$$\mathbf{b}_i : (\mathbb{R}_x^d)^{i-1} \to \Delta_d,$$

sodass $\mathbf{b}_i(\mathbf{x}_1^{i-1}) =: \mathbf{b}(\mathbf{x}_1^{i-1})$ den Portfoliovektor, den der Investor in der i-ten Periode wählt, nachdem er das vorherige Verhalten am Markt beobachtet hat, bezeichnet.
Des Weiteren sei S_n das Bruttovermögen, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $S_0 = 1\$$ wählen, und N_n das Nettovermögen am Ende der Periode n. Der Investor investiert also in der Handelsperiode n das Nettovermögen N_{n-1} gemäß dem Portfoliovektor b_n und erhält am Ende der Periode n das Bruttovermögen

$$S_n = N_{n-1} \sum_{j=1}^{d} b_n^j x_n^j = N_{n-1} \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n \rangle.$$

Zu Beginn eines neuen Handeltages $n+1$ erstellt der Investor anhand (Ver-)Käufen seinen aktuellen Portfoliovektor $\mathbf{b}_{n+1}$. Während dieser Umschichtungen hat er Transaktionskosten zu zahlen, deswegen gilt am Beginn des neuen Markttages $n+1$, dass $N_n \leq S_n$. Seien nun c_s, c_p mit $0 \leq c_s \leq 1$, $0 \leq c_p \leq 1$ die proportionalen Transaktionskosten, d.h. der Verkauf von einem Asset um 1\$ bringt netto lediglich $1 - c_s\$$ und analog kostet der Kauf von 1\$ Asset zusätzlich $c_p\$$. Wir betrachten den Spezialfall, dass die Kostensätze konstant über alle Assets sind.
Nun wollen wir die Transaktionskosten, die bei der Wahl des Portfolios $\mathbf{b}_{n+1}$ anfallen, bestimmen. Vor dem Umschichten haben wir $b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1}\$$ im j-ten Asset, nachher benötigen wir $b_{n+1}^{(j)} N_n\$$. Wenn $b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \leq b_{n+1}^{(j)} N_n$ müssen wir verkaufen, und die Transaktionskosten im j-ten Asset sind

$$c_s \left(b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)} N_n \right),$$

andernfalls müssen wir kaufen und die Transaktionskosten sind

$$c_p \left(b_{n+1}^{(j)} N_n - b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \right),$$

Wenn wir mit x^+ den Positivteil von x bezeichnen, lässt sich das Bruttovermögen als Summe des Nettovermögens und der Kosten in folgender Weise darstellen

$$S_n = N_n + c_s \sum_{j=1}^{d} \left(b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)} N_n \right)^+ + c_p \sum_{j=1}^{d} \left(b_{n+1}^{(j)} N_n - b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \right)^+.$$

Division beider Seiten durch S_n und Verwendung von

$$\omega_n := \frac{N_n}{S_n} \qquad 0 < \omega_n < 1,$$

liefert

$$1 = \omega_n + c_s \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{b_n^{(j)} x_n^{(j)}}{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n \rangle} - b_{n+1}^{(j)} \omega_n \right)^+ + c_p \sum_{j=1}^{d} \left(b_{n+1}^{(j)} \omega_n - \frac{b_n^{(j)} x_n^{(j)}}{\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n \rangle} N_{n-1} \right)^+ .$$

Für beliebige Portfoliovektoren $\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}$ und Renditevektor $\mathbf{x}_n$ gibt es einen eindeutigen Kostenfaktor $\omega_n \in [0, 1)$. Für den Wert des Kostenfaktors ω_n am Tag n gilt daher mit einer Funktion ω

$$\omega_n = \omega\left(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{x}_n\right).$$

Ab jetzt betrachten wir nur noch den Spezialfall $c := c_s = c_p$. Dann gilt:

$$c_s \left(b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)} N_n \right)^+ + c_p \left(b_{n+1}^{(j)} N_n - b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} \right)^+ = c \left| b_n^{(j)} x_n^{(j)} N_{n-1} - b_{n+1}^{(j)} N_n \right| .$$

Wenn wir mit einem Startkapital $S_0 = 1$ und $\omega_0 = 1$ starten, wird unser Vermögen am Ende der n-ten Periode

$$S_n = N_{n-1} \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n \rangle = \omega_{n-1} S_{n-1} \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n \rangle = \prod_{i=1}^{n} \left[\omega\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}\right) \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle \right] \tag{1}$$

sein. Mit der Notation

$$g\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i\right) = \ln\left(\omega\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}\right) \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle\right)$$

wird die durchschnittliche Wachstumsrate

$$\frac{1}{n} \ln S_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \ln\left(\omega\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}\right) \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i\right)$$

Unser Ziel ist es, diese zu maximieren.
Ab jetzt wird $\mathbf{X}_i := \mathbf{x}_i$ eine Zufallsvariable mit folgenden Eigenschaften sein:

1. $\mathbf{X}_i$ ist ein homogener Markovprozess erster Ordnung. D.h. die Übergangswahrscheinlichkeiten sind unabhängig vom Zeitpunkt t und der zukünftige Zustand hängt nur vom aktuellen Zustand ab

2. der Markovkern definiert durch $\mu\left(B|\mathbf{x}\right) := \mathbb{P}\left[\mathbf{X}_2 \in B | \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}\right]$ ist stetig, d.h. er ist stetig in Totalvariation, also $V(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \sup_{B \in \mathscr{B}} \left|\mu\left(B|\mathbf{x}\right) - \mu\left(B|\mathbf{x}'\right)\right| \to 0$, wenn $\mathbf{x}' \to \mathbf{x}$ und $\mathscr{B}$ bezeichne die Borel σ-Algebra

3. Es existiert $0 < a_1 < 1 < a_2 < \infty$, sodass $a_1 < \mathbf{X}^{(j)} < a_2$

Aus der zweiten und dritten Bedingung folgt die gleichmäßige Stetigkeit von V und, dass $\max_{\mathbf{x},\mathbf{x'}} V\left(\mathbf{x}, \mathbf{x'}\right) < 1$.
Um das Problem weiter zu bearbeiten benötigen wir folgende Definition

Definition 1 (Folge von Martingaldifferenzen)**.** *Seien $(\boldsymbol{Z}_n)$ und $(\boldsymbol{X}_n)$ Folgen von Zufallsvariablen mit*

- Z_n *ist eine Funktion von* $X_1, \ldots, X_n$
- $\mathbb{E}\left[Z_n | X_1, \ldots, X_{n-1}\right] = 0$ *fast sicher.*

Dann ist (Z_n) *eine Folge von Martingaldifferenzen bezüglich* (X_n)

Für Folgen von Martingaldifferenzen existiert ein starkes Gesetz der großen Zahl, nämlich

Satz 1. *Sei* (Z_n) *eine Folge von Martingaldifferenzen bezüglich* (X_n) *und* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{E}\left[Z_n^2\right]}{n^2} < \infty$. *Dann gilt*

$$lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i = 0 \quad fast\ sicher$$

Wir können eine Folge von Martingaldifferenzen (Z_n) definieren, indem wir für eine beliebige Folge von Zufallsvariablen (Y_n), für die gilt, dass Y_n eine Funktion von $X_1, \ldots, X_n$ ist, $Z_n = Y_n - \mathbb{E}\left[Z_n | X_1, \ldots, X_{n-1}\right]$ setzen.

Betrachten wir nun die Zerlegung $\frac{1}{n} \ln S_n = I_n + J_n$, wobei

$$\begin{aligned} I_n &:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{X}_{i-1}, \mathbf{X}_i\right) - \mathbb{E}\left[g\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{X}_{i-1}, \mathbf{X}_i\right) | \mathbf{X}_1^{i-1}\right] \\ J_n &:= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[g\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{X}_{i-1}, \mathbf{X}_i\right) | \mathbf{X}_1^{i-1}\right] \end{aligned}$$

I_n ist der Durchschnitt von Martingaldifferenzen. Wegen Bedingung 3 ist die Zufallsvariable $g\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{X}_{i-1}, \mathbf{X}_i\right)$ beschränkt, also ist I_n der Durchschnitt von beschränkten Martingaldifferenzen, der wegen Satz1 fast sicher gegen 0 konvergiert.

Deshalb ist die asymptotische Maximierung der durchschnittlichen Wachstumsrate $\frac{1}{n} S_n$ äquivalent zur Maximierung von J_n.
Unter der Bedingung 1 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{X}_{i-1}, \mathbf{X}_i\right) | \mathbf{X}_1^{i-1}\right] &= \mathbb{E}\left[\ln\left(\omega\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}\right) \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle\right)\right] \\ &= \ln\left(\omega\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}\right)\right) + \mathbb{E}\left[\ln \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle | \mathbf{X}_1^{i-1}\right] \\ &= \ln\left(\omega\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}\right)\right) + \mathbb{E}\left[\ln \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle | \mathbf{b}_i \mathbf{X}_{i-1}\right] \\ &=: v\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_{i-1}\right), \end{aligned}$$

und somit, dass die Maximierung der durchschnittlichen Wachstumsrate $\frac{1}{n} S_n$ äquivalent zur Maximierung von

$$J_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} v\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{X}_{i-1}\right) \tag{2}$$

ist. Die Terme im Durchschnitt J_n haben ein Gedächtnis, wodurch sich das Problem in ein dynamisches System ändert.

1.2 Algorithmus zur wachstumsoptimalen Portfolioselektion

Betrachten wir vorerst ein endliches Problem betreffend J_N, definiert wie in (2). Für ein fixes $N \in \mathbb{N}$, maximiere

$$\mathbb{E}\left[N \cdot J_N | \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 = \mathbf{x}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} v\left(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{X}_{i-1} | \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 = \mathbf{x}\right)\right]$$

durch eine geeignete Wahl von $\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_N$. Für allgemeine dynamische Optimierungsprobleme hat Richard Bellman 1957 sein berühmtes Prinzip von Optimierung formuliert als: "An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision."D.h., dass eine optimale Entscheidungsfolge die Eigenschaft hat, dass egal wie der Anfangszustand war und die erste Entscheidung ausfiel die übrigen Entscheidungen eine optimale Entscheidungsfolge bilden müssen, wenn man den Zustand, der aus der ersten Entscheidung resultiert beachtet. Die optimale Lösung kann also aus optimalen Lösungen von Teilproblemen konstruiert werden.
Daher definieren wir Funktionen $G_0, \ldots, G_N$ auf $\Delta \times [a_1, a_2]^d$ gemäß den sogenannten Bellman Gleichungen

$$\begin{aligned}
&G_N(\mathbf{b}, \mathbf{x}) := 0\\
&G_n(\mathbf{b}, \mathbf{x}) := \max_{\mathbf{b}'} \left[v(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{x}) + \mathbb{E}\left[G_{n+1}(\mathbf{b}', \mathbf{X}_2) | \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}\right]\right]\\
&\text{für n=N-1,\ldots,0 mit Maximierer} \quad \mathbf{b}'_n = g_n(\mathbf{b}, \mathbf{x})
\end{aligned}$$

Wir zerlegen also ein Mehrperioden Problem in einfachere Probleme zu verschiedenen Zeitpunkten n. $G_n(\mathbf{b}, \mathbf{x})$ maximiert die Summe vom Wert, den unser Portfolio zum Zeitpunkt n hat, wenn wir mit dem optimalen Portfolio $\mathbf{b}'$ fortfahren, und dem erwarteten Wert von diesem Portfolio im nächsten Zeitschritt, bedingt darauf, dass wir im ersten Schritt im Zustand $\mathbf{x}$ waren.
Setzen wir $F^n := G_{N-n}$ für $n = 0, \ldots, N$, dann kann man diese Rückwärtsgleichungen in Vorwärtsrichtung schreiben als

$$\begin{aligned}
&F^0(\mathbf{b}, \mathbf{x}) := 0\\
&F^n(\mathbf{b}, \mathbf{x}) := \max_{\mathbf{b}'} \left[v(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{x}) + \mathbb{E}\left[F^{n-1}(\mathbf{b}', \mathbf{X}_2) | \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}\right]\right] \qquad (3)\\
&\text{für n=1,\ldots,N mit Maximierer } f_n(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = g_{N-n}(\mathbf{b}, \mathbf{x})
\end{aligned}$$

Dann ist die Wahl $\mathbf{b}_n = f_n(\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{X}_{n-1})$ optimal und F_n ist der erwartete Wert des Portfolios, wenn bis n-1 optimal agiert wurde.
In den Situationen, die für den Investor optimal sind, haben wir $F^n(\mathbf{b}, \mathbf{x}) \to \infty$ für $n \to \infty$, wodurch wir aber nicht mehr zwischen den Qualtitäten der möglichen Portfolioselektionen unterscheiden können. (3) hat dann die Form

$$F^\infty(\mathbf{b}, \mathbf{x}) := \max_{\mathbf{b}'} \left[v(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{x}) + \mathbb{E}\left[F^\infty(\mathbf{b}', \mathbf{X}_2) | \mathbf{X}_1 = \mathbf{x}\right]\right]$$

was die Lösung $F^{\infty} = \infty$ hat. Um trotzdem eine brauchbare Lösung zu erhalten, müssen wir einen Diskontierungsfaktor δ mit $0 < \delta < 1$ verwenden und bekommen dadurch die diskontierte Bellman-Gleichung

$$F_{\delta}(\mathbf{b}, \mathbf{x}) := \max_{\mathbf{b}'} \left[v(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{x}) + (1-\delta)\, \mathbb{E}\left[F_{\delta}(\mathbf{b}', \mathbf{X}_2) \,|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x} \right] \right] \tag{4}$$

Die Lösung von (4) löst das diskontierte Problem und maximiert

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{\infty} (1-\delta)^i\, v(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{X}_{i-1} | \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 = \mathbf{x}) \right] = \sum_{i=1}^{\infty} (1-\delta)^i\, \mathbb{E}\left[v(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{X}_{i-1} | \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 = \mathbf{x}) \right]$$

Das klassische Hardy-Littlewood Theorem besagt, dass für reellwertige, beschränkte Folgen a_n, $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{\delta \to 0} \delta \sum_{i=0}^{\infty} (1-\delta)^i a_i$$

existiert, genau dann, wenn

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i$$

existiert und, dass diese Limiten übereinstimmen.
Wollen wir also

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[v(\mathbf{b}_{i-1}, \mathbf{b}_i, \mathbf{X}_{i-1}) | \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}, \mathbf{X}_0 = \mathbf{x} \right]$$

maximieren (falls er existert), so genügt es die Gleichung (4) für kleine δ zu lösen. Wenn wir dann für die Lösung F_{δ}^{*} mit $\delta \to 0$ gehen, erhalten wir die undiskontierte Bellman-Gleichung

$$\lambda + F(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = \max_{\mathbf{b}'} \left[v(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{x}) + \mathbb{E}\left[F(\mathbf{b}', \mathbf{X}_2) \,|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x} \right] \right] \tag{5}$$

Wenden wir uns nun wieder der diskontierte Bellmangleichung (4) zu. Man kann zeigen, dass diese eine eindeutige Lösung besitzt. Eine Möglichkeit diese zu erhalten ist die sogenannten "Value-Iteration": Für ein fixes $0 < \delta < 1$ und für $k = 0, 1, \dots$ setze

$$\begin{aligned} F_{\delta,0} &= 0 \\ F_{\delta,k+1}(\mathbf{b}, \mathbf{x}) &= \max_{\mathbf{b}'} \left[v(\mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{x}) + (1-\delta)\, \mathbb{E}\left[F_{\delta,k}(\mathbf{b}', \mathbf{X}_2) \,|\mathbf{X}_1 = \mathbf{x} \right] \right] \end{aligned}$$

Der Fixpunktsatz von Banach impliziert dann, dass die Value-Iteration gleichmäßig gegen eine eindeutige Lösung konvergiert.
Nun wollen wir eine mögliche Portfolioseleketionsregel angeben: Sei

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1^{*} &= \{1/d, \dots, 1/d\} \\ \mathbf{b}_{i+1}^{*} &= \arg\max_{\mathbf{b}'} \left[v(\mathbf{b}_i^{*}, \mathbf{b}', \mathbf{X}_i) + \mathbb{E}\left[F(\mathbf{b}', \mathbf{X}_{i+1}) \,|\mathbf{X}_i \right] \right] \end{aligned}$$

Satz 2. *Sei $\boldsymbol{b}_i^*$ wie gerade angegeben und $W^* \in \mathbb{R}$ die maximale Wachstumsrate. Wenn S_n^* das Vermögen zur Periode n bezeichnet, dass mir dem Portfolio $(\boldsymbol{b}_n^*)$ erreicht wurde, dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_n^* = W^* \quad fast\ sicher$$

Wenn S_n für das Vermögen zur Periode n steht, dass mit jedem anderen Portfolio $(\boldsymbol{b}_n)$ erreicht wurde, dann gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_n \leq W^* \quad fast\ sicher$$

1.3 Portfolioselektion mit Konsumation

Sei nun angenommen, dass es am Ende der n-ten Handelsperiode eine Konsumation $c_n \geq 0$ gibt. Für die Handelsperiode n ist S_{n-1} das Startkapital und daher gilt

$$S_n = (S_{n-1}\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n\rangle - c_n)^+,$$

wobei x^+ der Positivteil einer reellen Zahl x ist.
Falls $S_j > 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$ zeigen wir durch Induktion, dass

$$S_n = S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i\rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{i=k+1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i\rangle \tag{6}$$

wobei das leere Produkt per Definitionem gleich 1 ist. Für $n = 1$ gilt (6) offensichtlich. Angenommen (6) gilt für $n-1$:

$$S_{n-1} = S_0 \prod_{i=1}^{n-1} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i\rangle - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \prod_{i=k+1}^{n-1} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i\rangle$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} S_n =& S_{n-1}\langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n\rangle - c_n \\ =& \left(S_0 \prod_{i=1}^{n-1} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i\rangle - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \prod_{i=k+1}^{n-1} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i\rangle \right) \langle \mathbf{b}_n, \mathbf{x}_n\rangle - c_n \\ =& S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i\rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{i=k+1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i\rangle. \end{aligned}$$

Es sei noch betont, dass (6) genau dann für alle n gilt, wenn $S_n > 0$ für alle n. Andernfalls haben wir Ruin.
Nun wollen wir die Wahrscheinlichkeit von Ruin und die durchschnittliche Wachstumsrate ohne Ruin untersuchen. Per Definitionem gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\text{ruin}\} =& \mathbb{P}\Big\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \{S_n = 0\} \Big\} \\ =& \mathbb{P}\Big\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{ S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i\rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{i=k+1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i\rangle \leq 0 \Big\} \Big\} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\text{ruin}\} &= \mathbb{P}\Bigg\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{ \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle \left(S_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \right) \leq 0 \Big\} \Bigg\} \\
&\leq \mathbb{P}\Bigg\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{ \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle \left(S_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \right) \leq 0 \Big\} \Bigg\} \\
&\leq \mathbb{P}\Bigg\{ S_0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \Bigg\}
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\text{ruin}\} &= \mathbb{P}\Bigg\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big\{ \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle \left(S_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \right) \leq 0 \Big\} \Bigg\} \\
&\geq \max_n \mathbb{P}\Bigg\{ \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle \left(S_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \right) \leq 0 \Bigg\} \\
&= \mathbb{P}\Bigg\{ S_0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \Bigg\}
\end{aligned}$$

woraus folgt

$$\mathbb{P}\{\text{ruin}\} = \mathbb{P}\Bigg\{ S_0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \Bigg\}.$$

Ohne Ruin erhalten wir die folgenden Abschätzungen für die durchschnittliche Wachstumsrate

$$\begin{aligned}
W_n &= \frac{1}{n} \ln S_n \\
&= \frac{1}{n} \ln \left(S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{i=k+1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle \right) \\
&\leq \frac{1}{n} \ln S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle + \frac{1}{n} \ln S_0.
\end{aligned}$$

Ebenso

$$
\begin{aligned}
W_n &= \frac{1}{n} \ln S_n \\
&= \frac{1}{n} \ln \left(S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k \prod_{i=k+1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle \right) \\
&= \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle \left(S_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \right) \\
&\geq \frac{1}{n} \ln \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle \left(S_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle + \frac{1}{n} \ln \left(S_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \right)
\end{aligned}
$$

Das heißt, dass die asymptotische durchschnittliche Wachstumsrate im Falle von keinem Ruin die selbe ist, wie im Fall ohne Konsumation:

$$W_n = \frac{1}{n} \ln S_n \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle.$$

Betrachte nun den Fall einer konstanten Konsumation $c_n = c > 0$. Dann gibt es keinen Ruin, falls

$$S_0 > c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle}.$$

Aus der Definiton der durchschnittlichen Wachstumsrate folgt

$$W_k \approx \frac{1}{k} \ln \prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle,$$

woraus folgt, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \approx \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kW_k}.$$

Falls unsere Portfolioselektion asymptotisch optimal ist, d.h. $\lim_{n\to\infty} W_n = W^*$, dann folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} \langle \mathbf{b}_i, \mathbf{x}_i \rangle} \approx \sum_{k=1}^{\infty} e^{-kW^*} = \frac{e^{-W*}}{1 - e^{-W*}}.$$

Diese Approximation impliziert, dass die Ruinwahrscheinlichkeit nur dann klein sein kann, wenn gilt

$$S_0 > \frac{e^{-W*}}{1 - e^{-W*}}.$$

2 Wachstumsoptimale Portfolioselektion mit Leerverkäufen und Hebelwirkungen

2.1 Langzeitinvestment ohne Hebel

Ein Beispiel für die dynamische Portfolioselektion im Langzeitfall ist das ständige ausbalancierte Portfolio (CRP). Das CRP ist ein selbstfinanzierendes Portfolio, das heißt der Investor investiert sein Kapital in jeder Handelsperiode, anstatt etwas zu konsumieren oder neu zuzuführen. Mit dieser Strategie wählt der Investor also einen proportionalen Portfoliovektor $\mathbf{b} = \left(b^{(1)}, \ldots, b^{(d)}\right)$ und schlichtet dieses Portfolio nach jeder Handelsperiode neu um, um die Preisveränderungen im Markt anzupassen. Die $j-$te Komponente $b^{(j)}$ von $\mathbf{b}$ bezeichnet den Anteil vom Kapital des Investors, der in das $j-$te Asset investiert wurde. Der Portfoliovektor hat also nichtnegative Einträge, die sich auf 1 aufsummieren. Die Menge aller Portfoliovektoren ist gegeben durch

$$\Delta_d = \left\{ \mathbf{b} = \left(b^{(1)}, \ldots, b^{(d)}\right) | b^{(j)} \geq 0, \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} = 1 \right\}$$

Am Ende der n-ten Handelsperiode ist das Vermögen vom Investor gegeben durch $S_n = S_{n-1}\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_n \rangle = S_0 \prod_{i=1}^{n} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle$. O.B.d.A. wählen wir $S_0 = 1$.
Die asymptotische Wachstumsrate von dieser Portfolioselektion ist

$$\begin{aligned} W(\mathbf{b}) &= \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{S_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln S_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \ln S_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_i \rangle \end{aligned}$$

Wenn der Marktprozess (X_i) ohne Gedächtnis ist, also eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsreturnvektoren ist, dann existiert die asymptotische Wachstumsrate fast sicher und, falls $\mathbb{E} \ln\langle \mathbf{b},\mathbf{X} \rangle$ endlich ist, gilt nach dem starken Gesetz der großen Zahlen:

$$W(\mathbf{b}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\langle \mathbf{b},\ \mathbf{X}_i \rangle = \mathbb{E} \ln\langle \mathbf{b},\ \mathbf{X} \rangle \quad \text{fast sicher,} \tag{7}$$

wobei X verteilt ist wie X_i.
Um diese Eigenschaft sicherzustellen, können wir annehmen, dass $\mathbb{E}|X^{(j)}| < \infty$ für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$. Damit bekommen wir, da für ein beliebiges i $b^{(i)} \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \ln\langle \mathbf{b},\mathbf{X} \rangle \geq& \mathbb{E} \ln \left(b^{(i)} X^{(i)}\right) \\ &= \ln(b^{(i)}) + \mathbb{E} \ln X^{(i)} > -\infty \end{aligned}$$

Ebenso gilt für alle j, dass $b^{(j)} \leq 1$ und daher

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\ln\langle \mathbf{b},\mathbf{X}\rangle \leq & \mathbb{E}\ln\left(d\max_j X^{(j)}\right) \\
&= \ln d + \mathbb{E}\max_j \ln X^{(j)} \\
&\leq \ln d + \mathbb{E}\max_j \ln|X^{(j)}| \\
&\leq \ln d + \sum_j \mathbb{E}\ln|X^{(j)}| < \infty
\end{aligned}$$

Von (7) folgt, dass Umschichten gemäß der log-optimalen Strategie

$$\mathbf{b}^* = \arg\max_{\mathbf{b}\in\Delta_d} \mathbb{E}\ln\langle \mathbf{b},\mathbf{X}\rangle$$

auch eine asymptotisch optimale Handelsstrategie ist, also eine Strategie mit optimalem asymptotischen Wachstum

$$W(\mathbf{b}^*) \geq W(\mathbf{b}) \text{ fast sicher}$$

für alle $\mathbf{b} \in \Delta_d$. Die Strategie, bei der am Beginn jeder Handelsperiode gemäß $\mathbf{b}^*$ umgeschichtet wird, ist das beste ständig umgeschichtete Portfolio (BCRP).
Das Ziel ist es nun, die asymptotische Wachstumsrate mit Hilfe des (konvexen) Karush-Kuhn-Tucker (KKT) Theorems zu maximieren. Dieses gibt uns im Falle einer konvexen Zielfunktion mit konvexen Ungleichungsrestriktionen und affinen Gleichungsrestriktionen notwendige Optimalitätskriterien an einen Punkt, um eine lokales Minimum zu sein. Dieses ist dann aufgrund der Konvexität sogar ein globales. Konkret geht es um ein Problem der Form:

$$\begin{aligned}
\text{Minimiere } f(x) \text{ unter den Nebenbedingungen } g_i(x) &\leq 0 \text{ für } i = 1,\ldots,k \\
h_j(x) &= 0 \text{ für } j = 1\ldots,l
\end{aligned}$$

Dann ist ein Punkt $\mathbf{x}^*$ optimal, wenn für diesen die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

$$\begin{aligned}
\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{k}\mu_i^*\nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{l}\lambda_j^*\nabla h_j(x^*) &= 0 \\
g_i(x^*) &\leq 0 \text{ i=1,\ldots,k} \\
h_j(x^*) &= 0 \text{ j=1,\ldots,l} \\
\mu_i^* &\geq 0 \text{ i=1,\ldots,k} \\
\mu_i^* g_i(x^*) &= 0 \text{ i=1,\ldots,k,}
\end{aligned}$$

erfüllt sind.
Wir wollen $W(\mathbf{b})$, welche eine konkave Funktion ist, maximieren. Dies ist äquivalent dazu die konvexe Funktion

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}) = -W(\mathbf{b}) = -\mathbb{E}\ln\langle \mathbf{b},\mathbf{X}\rangle.$$

zu minimieren. Die Unlgeichungsbedingungen auf unserem Suchraum Δ_d sind

$$\begin{aligned} -b^{(i)} &\leq 0 \text{ für } i = 1, \dots, d \\ \text{also } \langle \mathbf{b}, \mathbf{a}_i \rangle &\leq 0, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^d$ den negativen kanonischen i-ten Einheitsvektor bezeichnet. Die einzige Gleichheitsbedingung ist

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{d} b^{(j)} - 1 &= 0 \\ \text{also } \langle \mathbf{b}, \mathbf{e} \rangle - 1 &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

wobei $\mathbf{e} \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)$.
Die partiellen Ableitungen von $f_{\mathbf{X}}$ sind

$$\frac{\partial f_{\mathbf{X}}(\mathbf{b})}{\partial b^{(i)}} = -\mathbb{E} \frac{X^{(i)}}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{X} \rangle}$$

Das KKT-Theorem besagt nun, dass der Portfoliovektor $\mathbf{b}^*$ genau dann optimal ist, wenn er die Bedingungen (8) und (9) erfüllt und Konstanten $\mu_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, d)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ existieren, sodass

$$\begin{aligned} \nabla f_{\mathbf{X}}(\mathbf{b}^*) - \sum_{i=1}^{d} \mu_i \mathbf{a}_i + \lambda \mathbf{e} &= 0 \\ \mu_j \langle \mathbf{b}^*, \mathbf{a}_j \rangle &= 0 \text{ für } j = 1 \dots, d \end{aligned}$$

Genauer bedeutet dies, dass für alle $j = 1, \dots, d$ gelten muss:

$$\begin{aligned} -\mathbb{E} \frac{X^{(j)}}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X} \rangle} - \mu_j + \lambda &= 0 \\ \mu_j b^{*(j)} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Durch Aufsummieren und Gewichten mit $b^{*(j)}$ der Gleichung (10) erhalten wir

$$\begin{aligned} -\mathbb{E} \frac{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X} \rangle}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X} \rangle} - \sum_{j=1}^{d} \mu_j b^{*(j)} + \sum_{i=1}^{d} \lambda b^{*(j)} &= 0 \\ \leftrightarrow \ -1 - \sum_{j=1}^{d} \mu_j b^{*(j)} + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

und, dass, weil jeder Summand $\mu_j b^{*(j)} = 0$ erfüllt, $\lambda = 1$ gelten muss.
Dadurch können wir folgende notwendige Optimatlitätsbedingungen an $\mathbf{b}^*$ stellen:

$$\text{Wenn } \mathbf{b}^* \in \arg\max_{\mathbf{b} \in \Delta_d} W(\mathbf{b}) \text{ dann gilt}$$

$$b^{*(j)} > 0 \longrightarrow \mu_j = 0 \longrightarrow \mathbb{E} \frac{X^{(j)}}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X} \rangle} = 1$$

$$b^{*(j)} = 0 \longrightarrow \mu_j \geq 0 \longrightarrow \mathbb{E} \frac{X^{(j)}}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X} \rangle} \leq 1$$

Nachdem wir es mit einem konvexen Optimierungsproblem zu tun haben, wissen wir, dass ein lokales Minimum auch ein globales ist. Wir erhalten also nicht nur notwendige, sondern auch hinreichende Optimalitätsbedingungen. Gilt für $\mathbf{b}^* \in \Delta_d$ für jedes fixe $j = 1, \dots, d$ entweder

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\frac{X^{(j)}}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}\rangle} &= 1 \text{ und } b^{*(j)} > 0 \\ \text{oder } \mathbb{E}\frac{X^{(j)}}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}\rangle} &\leq 1 \text{ und } b^{*(j)} = 0 \end{aligned}$$

dann ist $\mathbf{b}^*$ optimal.

2.2 Leerverkäufe

Bei Leerverkäufen werden Assets ausgeborgt und dann sofort verkauft. Als Schuldensicherheit muss der Investor dem Leiher Sicherheiten im selben Wert vom geshorteten Asset geben.
Der Investor muss zwar Sicherheiten zur Verfügung stellen, durch den Verkauf vom geborgten Asset erhält er jedoch den Preis des geshorteten Assets wieder zurück. Dies bedeutet, dass:

$$S' = S - C + P,$$

wobei S' das Kapital nach dem Gehen in eine Short-Positon, S das Kapital davor, C die Sicherheit für das Borgen und P der erhaltene Preis vom Verkauf des geshorteten Assets sind. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $C = P$, also $S' = S$ gilt und Leerverkäufe daher gratis sind.
Angenommen wir machen nur ein Investment in das j-te Asset, unser Startkapital ist S_0 und wir investieren einen Anteil $b \in (-1, 1)$ von unserem Kapital. Wenn wir erwarten, dass der Wert steigen wird, die Postion also long ist ($b > 0$), resultiert dies im Vermögen

$$S_0(1-b) + S_0 b x_1^{(j)} = S_0 + S_0 b \left(x_1^{(j)} - 1\right).$$

Wenn hingegen die Position short ist, also $b < 0$, dann profitieren wir vom Wertverlust unseres Assets:

$$S_0 + S_0|b|\left(1 - x_1^{(j)}\right) = S_0 + S_0 b \left(x_1^{(j)} - 1\right)$$

Sei $\mathbf{b} = (b^{(0)}, \dots, b^{(d)})$ der Portfoliovektor, sodass die 0-te Komponente dem Anteil von Bargeld entspricht. Am Ende der ersten Handelsperiode wird das Kapital des Investors

$$S_1 = S_0 \left(b^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} \left[b^{(j)+} x_1^{(j)} + b^{(j)-}(x_1^{(j)} - 1) \right] \right)^+, \tag{11}$$

wobei $(\cdot)^+$ für das $\max(x, 0)$ und $(\cdot)^-$ für das $\min(x, 0)$ steht. Im Fall, dass das Nettovermögen vom Investor auf Null oder darunter fällt ist er zahlungsunfähig. In diesem

Setting ist negatives Kapital definitionsgemäß nicht erlaubt. Wie bereits erwähnt kostet es nichts in eine Short-Position zu gehen. Es kosten also nur Long-Positionen Geld, deshalb beschränken wir uns auf Portfolios, für die $\sum_{j=0}^{d} b^{(j)+} = 1$ gilt. Daher gilt nun, dass

$$
\begin{aligned}
S_1 =& S_0 \left(\sum_{j=0}^{d} b^{(j)+} + \sum_{j=1}^{d} \left[b^{(j)+}(x_1^{(j)} - 1) + b^{(j)-}(x_1^{(j)} - 1) \right] \right)^+ \\
=& S_0 \left(1 + \sum_{j=1}^{d} \left[b^{(j)}(x_1^{(j)} - 1) \right] \right)^+ \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Wenn der Return in den Long-Postionen größer als 1, also eine Wertsteigerung stattgefunden hat, ist der Summand positiv, und Analoges gilt für Short-Positionen mit Return kleiner als 1, also im Falle einer Wertminderung. Wir verdienen daher solange Long-Positionen steigen und Short-Positionen fallen.
Leerverkäufe sind ein riskantes Investment, da Marktwerte theoretisch nur nach unten durch 0, nicht jedoch nach oben beschränkt sind. Dies könnte einen Verlust der Höhe unendlich nach sich ziehen. Die Möglichkeit dazu würde zu einer Wachstumsrate von minus unendlich führen, weshalb wir unseren Marktprozess begrenzen:

$$
1 - B + \delta < x_n^{(j)} < 1 + B - \delta \text{ für } j = 1, \ldots, d. \qquad (13)
$$

Für gewöhnliche Marktdaten existieren $0 < a_1 < 1 < a_2 < \infty$, sodass

$$
a_1 \leq x_n^{(j)} \leq a_2 \text{ für alle } j = 1, \ldots, d
$$

Angenommen, dass der Investor immer im für ihn ungünstigen Asset short bzw. long gegangen ist. Mithilfe von (12) und (13) sieht man dann leicht, dass der größtmögliche Verlust $B \sum_{j=1}^{d} |b^{(j)}|$ ist. Um Ruin zu verhindern muss dieser Wert eingeschränkt werden. Wir definieren daher die Menge an möglichen Portfoliovektoren durch:

$$
\Delta_d^{(-B)} = \left\{ \mathbf{b} = (b^{(0)}, \ldots, b^{(d)}) | b^{(0)} \geq 0, \sum_{j=0}^{d} b^{(j)+} = 1, B \sum_{j=1}^{d} |b^{(j)}| \leq 1 \right\} \qquad (14)
$$

$\sum_{j=0}^{d} b^{(j)+} = 1$ bedeutet, dass wir all unser Anfangskapital entweder in Bar oder in Long-Positionen investieren. Durch $B \sum_{j=1}^{d} |b^{(j)}| \leq 1$ wird das Risiko so limitiert, dass Ruin nicht möglich und die Wachstumsrate endlich ist. $b^{(0)}$ ist dabei nicht eingebunden, da Bargeld kein Risiko birgt. Es sei noch bemerkt, dass, falls $B \leq 1$, $\Delta_{d+1} \subset \Delta_d^{(-B)}$ und daher die mögliche Wachstumsrate durch Leerverkäufe nicht kleiner sein kann als im Langzeitfall.
Mit $B \leq 1$ ist Ruin nicht möglich, wegen

$$
\begin{aligned}
1 + \sum_{j=1}^{d} \left[b^{(j)}(x_1^{(j)} - 1) \right] >& 1 + \sum_{j=1}^{d} \left[b^{(j)+}(1 - B + \delta - 1) + b^{(j)-}(1 + B - \delta - 1) \right] \\
=& 1 - (B - \delta) \sum_{j=1}^{d} |b^{(j)}| \\
\geq& \delta \sum_{j=1}^{d} |b^{(j)}|
\end{aligned}
$$

Falls $\sum_{j=1}^{d} |b^{(j)}| = 0$ dann ist $b^{(0)} = 1$, also kein Ruin. In jedem anderen Fall gilt $\delta \sum_{j=1}^{d} |b^{(j)}| > 0$. Wir haben also nicht nur keinen Ruin versichert sondern auch

$$\mathbb{E} \ln \left(1 + \sum_{j=1}^{d} \left[b^{(j)} (X_1^{(j)} - 1) \right] \right)^+ > -\infty$$

Wir wollen nun Optimalitätsbedingungen für Leerverkäufe mit Barkonto erarbeiten. Ein Problem mit $\Delta_d^{(-B)}$ ist, dass es nicht konvex ist und wir daher das Karush-Kuhn-Tucker Theorem nicht anwenden können. Um dies einzusehen sei $\mathbf{b}_1 = (0,1) \in \Delta_1^{(-1)}$ und $\mathbf{b}_2 = (1, -1/2) \in \Delta_1^{(-1)}$. Dann ist aber $\frac{\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2}{2} = (1/2, 1/4) \notin \Delta_1^{(-1)}$, da $1/2 + 1/4 \neq 1$. Wir können aber das nicht konvexe $\Delta_d^{(-B)}$ in ein konvexes Gebiet transformieren. Dieser neue Suchraum ist:

$$\tilde{\Delta}_d^{(-B)} = \left\{ \tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}^{(0+)}, \tilde{b}^{(1+)}, \tilde{b}^{(1-)} \ldots, \tilde{b}^{(d+)}, \tilde{b}^{(d-)} \in \mathbb{R}_0^{+\,2d+1} | \sum_{j=0}^{d} \tilde{b}^{(j+)} = 1, B \sum_{j=1}^{d} (\tilde{b}^{(j+)} + \tilde{b}^{(j-)}) \leq 1 \right\}$$

Der Übergang von $\Delta_d^{(-B)}$ nach $\tilde{\Delta}_d^{(-B)}$ geschieht durch

$$\tilde{\mathbf{b}} = \left(b^{(0)}, \left(b^{(1)}\right)^+, \left| \left(b^{(1)}\right)^- \right|, \ldots, \left(b^{(d)}\right)^+, \left| \left(b^{(d)}\right)^- \right| \right)$$

Da $\mathbf{b}$ nur noch positive Einträge hat, wird (11) zu:

$$S_1 = S_0 \left(\tilde{b}^{(0+)} + \sum_{j=1}^{d} \left[\tilde{b}^{(j+)} x_1^{(j)} + \tilde{b}^{(j-)} (1 - x_1^{(j)}) \right] \right)^+ .$$

Deshalb müssen wir auch den Marktvektor transformieren

$$\tilde{\mathbf{X}} = \left(1, X^{(1)}, 1 - X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}, 1 - X^{(d)}\right)$$

damit $S_1 = S_0 \langle \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{X}} \rangle$ gilt.

Um das KKT-Theorem anwenden zu können, formulieren wir die $2d + 2$ Ungleichungsbedingungen an unseren Suchraum

$$B \sum_{j=1}^{d} \left(\tilde{b}^{(j+)} + \tilde{b}^{(j-)} \right) - 1 \leq 0 \tag{15}$$

$$- \tilde{b}^{(0+)} \leq 0, \; -\tilde{b}^{(i+)} \leq 0, \; -\tilde{b}^{(i-)} \leq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, d. \tag{16}$$

Die einzige Gleichungsbedingung ist gegeben durch

$$\sum_{j=0}^{d} \tilde{b}^{(j+)} - 1 = 0 \tag{17}$$

Die partiellen Ableitungen der konvexen zu optimierenden Funktion $f_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{b}}) = -\mathbb{E} \ln\langle \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{X}} \rangle$ für $i = 1, \ldots, d$, sind:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{b}})}{\partial \tilde{b}^{(0_+)}} = -\mathbb{E}\frac{1}{\langle \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{X}} \rangle}$$
$$\frac{\partial f_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{b}})}{\partial \tilde{b}^{(i_+)}} = -\mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{X}} \rangle}$$
$$\frac{\partial f_{\mathbf{X}}(\tilde{\mathbf{b}})}{\partial \tilde{b}^{(i_-)}} = -\mathbb{E}\frac{1 - X^{(i)}}{\langle \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{X}} \rangle}$$

Gemäß dem KKT-Theorem ist ein Portfoliovektor $\tilde{\mathbf{b}}^*$ genau dann optimal, wenn er die Bedingungen (15) - (17) erfüllt und für $i = 1, \ldots, d$ $2d + 3$ Konstanten $\mu_{0_+} \geq 0, \mu_{i_+} \geq 0, \mu_{i_-} \geq 0, \nu \geq 0$ und λ existieren, sodass

$$-\mathbb{E}\frac{1}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \tilde{\mathbf{X}} \rangle} - \mu_{0_+} + \lambda = 0 \tag{18}$$
$$-\mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \tilde{\mathbf{X}} \rangle} + \nu B - \mu_{i_+} + \lambda = 0 \tag{19}$$
$$-\mathbb{E}\frac{1 - X^{(i)}}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \tilde{\mathbf{X}} \rangle} + \nu B - \mu_{i_-} = 0 \tag{20}$$
$$\nu \left(B \sum_{j=1}^{d} \left(\tilde{b}^{*(j_+)} + \tilde{b}^{*(j_-)} \right) - 1 \right) = 0 \tag{21}$$
$$\mu_{0_+} \tilde{b}^{*(0_+)} = 0$$
$$\mu_{i_+} \tilde{b}^{*(i_+)} = 0$$
$$\mu_{i_-} \tilde{b}^{*(i_-)} = 0$$

Wenn wir die Gleichungen (18), (19) und (20) jeweils mit $\tilde{b}^{*(0_+)}, \tilde{b}^{*(i_+)}$und $\tilde{b}^{*(i_-)}$ gewichten und aufsummieren, erhalten wir, da die μ_i wegfallen und mithilfe von (21):

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}\frac{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \tilde{\mathbf{X}} \rangle}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \tilde{\mathbf{X}} \rangle} + \nu B \sum_{j=1}^{d} \left(\tilde{b}^{*(j_+)} + \tilde{b}^{*(j_-)} \right) + \lambda \sum_{j=0}^{d} \tilde{b}^{*(j_+)} &= 0 \\ \leftrightarrow -1 + \nu + \lambda &= 0 \\ \leftrightarrow \lambda &= 1 - \nu \qquad (22) \\ \leftrightarrow \lambda &\leq 1. \end{aligned}$$

Falls gilt, dass $B \sum_{j=1}^{d} \left(\tilde{b}^{(j_+)} + \tilde{b}^{(j_-)} \right) < 1$ erhalten wir mit (21), dass $\nu = 0$ und daher mit (22), dass $\lambda = 1$.

In diesem Fall vereinfachen sich also die KKT-Bedingungen zu

$$-\mathbb{E}\frac{1}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}-\mu_{0_+}+1=0$$
$$-\mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}-\mu_{i_+}+1=0$$
$$-\mathbb{E}\frac{1-X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}-\mu_{i_-}=0$$

Diese Gleichungen führen zu weiteren einfachen Folgerungen:

$$\tilde{b}^{*(0_+)}>0\longrightarrow\mu_{0_+}=0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{1}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}=1$$
$$\tilde{b}^{*(0_+)}=0\longrightarrow\mu_{0_+}\geq 0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{1}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}\leq 1$$
$$\tilde{b}^{*(i_+)}>0\longrightarrow\mu_{i_+}=0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}=1$$
$$\tilde{b}^{*(i_+)}=0\longrightarrow\mu_{i_+}\geq 0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}\leq 1$$
$$\tilde{b}^{*(i_-)}>0\longrightarrow\mu_{i_-}=0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{1-X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}=0$$
$$\tilde{b}^{*(i_-)}=0\longrightarrow\mu_{i_-}\geq 0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{1-X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}\leq 0$$

Zum Schluss muss der Vektor $\tilde{\mathbf{b}}^*$ zurück transformiert werden, indem man $b^{*(0)}=\tilde{b}^{*(0)}$ und $b^{*(i)}=\tilde{b}^{*(i_+)}-\tilde{b}^{*(i_-)}$ setzt. Da die Transformation sehr simpel war, können wir die soeben bestimmen Folgerungen auch auf das ursprüngliche Portfolio $\tilde{\mathbf{b}}^*$ übertragen:

$$b^{*(0)}>0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{1}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}=1$$
$$b^{*(0)}=0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{1}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}\leq 1$$
$$b^{*(i)}>0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}=1\text{ und }\mathbb{E}\frac{1-X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}\leq 0$$
$$b^{*(i)}=0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}\leq 1\text{ und }\mathbb{E}\frac{1-X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}^*\rangle}\leq 0$$
$$b^{*(i)}<0\longrightarrow\mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}\leq 1\text{ und }\mathbb{E}\frac{1-X^{(i)}}{\langle\tilde{\mathbf{b}}^*,\tilde{\mathbf{X}}\rangle}=0$$

2.3 Langzeitinvestment mit Hebelwirkung

Wir betrachten nun nur Portfolios mit $b^{(i)} \geq 0, i = 1, \ldots, d$, also ohne Leerverkäufe. Es sei angenommen, dass der Investor Geld borgen kann und zum selben Zinssatz r investieren kann, und, dass der maximale Betrag $L_{B,r}$ (relativ zum eigenen Startkapital S_0) zu jeder Zeit zur Verfügung steht. Der Investor kann selbst über die Verteilung seiner Kaufkraft entscheiden, darum gilt $\sum_{j=0}^{d} b^{(j)} = L_{B,r}$. Geld, das nicht investiert wurde hat den selben Zinssatz wie das Ausborgen. Der Marktvektor sei also definiert durch:

$$\mathbf{X}_r = \left(X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}\right) = \left(1 + r, X^{(1)}, \ldots, X^{(d)}\right)$$

Die Menge der möglichen Portfoliovektoren ist gegeben durch

$${}^{r}\Delta_d^{+B} = \{\mathbf{b} = (b^{(0)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(d)}) \in \mathbb{R}_0^{+^{d+1}}, \sum_{j=0}^{d} b^{(j)} = L_{B,r}\},$$

wobei $b^{(0)}$ für die nicht investierte Kaufkraft steht. Der Markt entwickelt sich gemäß

$$S_1 = S_0(\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_r \rangle - (L_{B,r} - 1)(1 + r))^+,$$

wobei $S_0 r(L_{B,r} - 1)$ der Zins für das Ausborgen von $L_{B,r} - 1$ mal dem Startkapital S_0 ist. Um eine endliche Wachstumsrate und keinen Ruin zu sichern, wähle $L_{B,r} = \frac{1+r}{B+r}$. Dadurch ist kein Ruin möglich:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_r \rangle - (L_{B,r} - 1)(1 + r) &= \sum_{j=0}^{d} b^{(j)} X^{(j)} - (L_{B,r} - 1)(1 + r) \\
&= b^{(0)}(1 + r) + \sum_{j=1}^{d} b^{(j)} X^{(j)} - (L_{B,r} - 1)(1 + r) \\
&> b^{(0)}(1 + r) + \sum_{j=1}^{d} b^{(j)}(1 - B + \delta) - (L_{B,r} - 1)(1 + r) \\
&= b^{(0)}(1 + r) + (L_{B,r} - b^{(0)})(1 - B + \delta) - (L_{B,r} - 1)(1 + r) \\
&= b^{(0)}(r + B - \delta) - L_{B,r}(B - \delta + r) + 1 + r \\
&\geq -\frac{1 + r}{B + r}(B - \delta + r) + 1 + r \\
&= \delta \frac{1 + r}{B + r}.
\end{aligned}$$

Wir wollen wieder die negative asymptotische Wachstumsrate optimieren. Die lautet jetzt:

$$f_{\mathbf{X}_r}^{+B}(\mathbf{b}) = -\mathbb{E} \ln(\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_r \rangle - (L_{B,r} - 1)(1 + r)).$$

Die linearen Ungleichungsbedingungen sind

$$-b^{(i)} \leq 0, \text{ für } i = 0, \ldots, d \tag{23}$$

und die einzige Gleichheitsbedingung lautet

$$\sum_{j=0}^{d} b^{(j)} - L_{B,r} = 0. \tag{24}$$

Die partiellen Ableitungen von $f_{\mathbf{X}_r}^{+B}$ sind

$$\frac{\partial f_{\mathbf{X}_r}^{+B}(\mathbf{b})}{\partial b^{(i)}} = -\mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle \mathbf{b}, \mathbf{X}_r\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)}$$

Gemäß dem KKT Theorem ist ein Portfoliovektor $\mathbf{b}^*$, der die Bedingungen (23) und (24) erfüllt, genau dann optimal, wenn es $\mu_j \geq 0 (j = 0, \dots, d)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für $j = 0, \dots, d$ gilt:

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}\frac{X^{(j)}}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}_r\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} - \mu_j + \lambda &= 0 \qquad (25)\\ \mu_j b^{*(j)} &= 0 \end{aligned}$$

Wenn wir (25) mit $b^{*(j)}$ gewichten und aufsummieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}\frac{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}_r\rangle}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}_r\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} - \sum_{j=0}^{d}\mu_j b^{*(j)} + \sum_{j=0}^{d} b^{*(j)}\lambda &= 0\\ \leftrightarrow 1 + \mathbb{E}\frac{(L_{B,r}-1)(1+r)}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}_r\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} &= L_{B,r}\lambda\\ \leftrightarrow \frac{1}{L_{B,r}} + \frac{(L_{B,r}-1)(1+r)}{L_{B,r}}\mathbb{E}\frac{1}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}_r\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} &= \lambda \end{aligned}$$

Daraus können wir folgern, dass

$$\begin{aligned} b^{*(0)} > 0 &\longrightarrow \mu_j = 0 \longrightarrow \mathbb{E}\frac{1+r}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}_r\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} = \lambda\\ b^{*(0)} = 0 &\longrightarrow \mathbb{E}\frac{1+r}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}_r\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} \leq \lambda\\ b^{*(j)} > 0 &\longrightarrow \mu_j = 0 \longrightarrow \mathbb{E}\frac{X^{(j)}}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}_r\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} = \lambda\\ b^{*(j)} = 0 &\longrightarrow \mathbb{E}\frac{X^{(j)}}{\langle \mathbf{b}^*, \mathbf{X}_r\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} \leq \lambda \qquad (26) \end{aligned}$$

2.4 Leerverkäufe und Hebel

Zum Abschluss wollen wir noch die zwei vorangegangenen Techniken verbinden. Der Markt entwickelt sich also gemäß

$$S_1 = S_0\left(b^{(0)}(1+r) + \sum_{j=1}^{d}\left[b^{(j)^+}x_1^{(j)} + b^{(j)^-}(x_1^{(j)} - 1 - r)\right] - (L_{B,r}-1)(1+r)\right)^+$$

auf dem nicht konvexen Gebiet

$$ {}^{r}\Delta_d^{\pm B} = \left\{ \mathbf{b} = (b^{(0)}, b^{(1)}, \ldots, b^{(d)}) \,\middle|\, \sum_{j=0}^{d} |b^{(j)}| = L_{B,r} \right\}, $$

wobei $L_{B,r}$ wie vorhin die Kaufkraft und $b^{(0)}$ die nicht investierte Kaufkraft bezeichnet. Analog zum Vorgehen in Abschnitt 2.2 können wir ${}^{r}\Delta_d^{\pm B}$ in ein konvexes Gebiet transformieren, um das KKT Theorem anwenden zu können:

$$ {}^{r}\tilde{\Delta}_d^{\pm B} = \left\{ \tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}^{(0+)}, \tilde{b}^{(1+)}, \tilde{b}^{(1-)}, \ldots, \tilde{b}^{(d+)}, \tilde{b}^{(d-)}) \in \mathbb{R}_0^{+2d+1} \,\middle|\, \tilde{b}^{(0+)} + \sum_{j=1}^{d} \left(\tilde{b}^{(j+)} + \tilde{b}^{(j-)} \right) = L_{B,r} \right\} $$

sodass

$$ \tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}^{(0+)}, \tilde{b}^{(1+)}, \tilde{b}^{(1-)}, \ldots, \tilde{b}^{(d+)}, \tilde{b}^{(d-)}) = (b^{(0)}, b^{(1)^{+}}, |b^{(1)^{-}}|, \ldots, b^{(d)^{+}}, |b^{(d)^{+}}|) $$

Ebenso führen wir den transformierten Returnvektor ein

$$ \mathbf{X}_{\pm r} = (1+r, X^{(1)}, 2 - X^{(1)} + r, \ldots, X^{(d)}, 2 - X^{(d)} + r) $$

Die $2 - X^{(i)} + r$ Terme ergeben sich daher, dass, obwohl Leerverkäufe gratis sind, für die Kaufkraft, die dafür verwendet wird, trotzdem Zinsen fällig werden. Leerverkäufe reduzieren unsere Kaufkraft, weshalb wir $2-X^{(i)}+r$, statt $1-X^{(i)}+r$ schreiben. Da ${}^{r}\tilde{\Delta}_d^{\pm B} ={}^{r} \Delta_{2d}^{+B}$ können wir die Ergebnisse des vorigen Abschnittes ganz einfach übertragen:

$$
\begin{aligned}
b^{*(0)} > 0 &\longrightarrow \mathbb{E}\frac{1+r}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \mathbf{X}_{\pm r}\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} = \lambda \\
b^{*(0)} = 0 &\longrightarrow \mathbb{E}\frac{1+r}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \mathbf{X}_{\pm r}\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} \le \lambda \\
b^{*(i)} > 0 &\longrightarrow \mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \mathbf{X}_{\pm r}\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} = \lambda \\
\text{und } &\longrightarrow \mathbb{E}\frac{2-X^{(i)}+r}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \mathbf{X}_{\pm r}\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} \le \lambda \\
b^{*(i)} = 0 &\longrightarrow \mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \mathbf{X}_{\pm r}\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} \le \lambda \\
\text{und } &\longrightarrow \mathbb{E}\frac{2-X^{(i)}+r}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \mathbf{X}_{\pm r}\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} \le \lambda \\
b^{*(i)} < 0 &\longrightarrow \mathbb{E}\frac{X^{(i)}}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \mathbf{X}_{\pm r}\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} \le \lambda \\
\text{und } &\longrightarrow \mathbb{E}\frac{2-X^{(i)}+r}{\langle \tilde{\mathbf{b}}^*, \mathbf{X}_{\pm r}\rangle - (L_{B,r}-1)(1+r)} = \lambda
\end{aligned}
$$

Es sei noch bemerkt, dass im Spezialfall $L_{B,r} = 1$ wegen (26) gilt, dass $\lambda = 1$.

Literatur

[1] Wikipedia: Bellman equation.

[2] Wikipedia: konvexe optimierung.

[3] Györfi, Ottucsák, and Walk. *Machine Learning for Financial Engineering.* 2012.