Die Rolle der Mathematik auf den Finanzmärkten

Walter Schachermayer, Technische Universität Wien

20. Dezember 2001

Die Finanzmärkte haben in den vergangenen Jahren nicht nur eine stürmische Entwicklung erlebt, sondern es haben sich auch die verwendeten Methoden für die Beurteilung der Güte und des Risikos eines Investments verändert: Während noch vor 30 Jahren für einen erfolgreichen Investor neben juristischen und betriebswirtschaftlichen Kenntnissen im wesentlichen nur das „richtige Gespür“ als Werkzeug zur Verfügung stand, ist heute eine Vielzahl von quantitativen Methoden im Einsatz. Eine zentrale Rolle spielen der Begriff der „Arbitrage“ sowie die „Black-Scholes-Formel“ zur Bewertung und Absicherung von Optionen; die Bedeutung dieser Formel wurde 1997 durch die Verleihung des Ökonomie-Nobelpreis an R. Merton und M. Scholes gewürdigt. Damit wurde auch der 1995 verstorbene F. Black geehrt (Nobelpreise werden prinizipiell nicht posthum verliehen).

In diesem kurzen Beitrag will ich versuchen, einen allgemein verständlichen Überblick über die stochastische Finanzmathematik — das ist die Theorie, die hinter diesen Methoden steht — zu geben. Insbesondere möchte ich die Stärken, aber auch die Schwächen der Modellierung von Finanzmärkten durch stochastische (i.e., vom Zufall abhängige) Prozesse aufzeigen.

Beginnen wir unsere Überlegungen mit der älteren Schwester der Finanzmathematik, der klassischen Versicherungsmathematik. Seit im Jahre 1693 Sir Edmond Halley, der Schüler und Freund von Isaac Newton, der uns vor allem aufgrund des nach ihm benannten Kometen bekannt ist, eine „Sterbetafel“ veröffentlicht hat, benutzen die Versicherungsmathematiker zur Berechnung von Versicherungsprämien durchgehend dieselbe Methode: das sogenannte „Äquivalenz-Prinzip“.

Wir wollen das an einem ganz einfachen Beispiel illustrieren.

Nehmen wir an, eine 40-jährige Frau schliesst eine einjährige Risiko-Versicherung ab: Im Falle ihres Tods im Lauf des darauffolgenden Jahres erhalten Ihre Erben am Ende dieses Jahres die Versicherungssumme S ausbezahlt, beispielsweise $S = 100.000$ €; andernfalls erfolgt keine Leistung aus dem Vertrag. Wie kalkuliert ein Versicherungs-Unternehmen die Prämie, die es für diesen Vertrag fordert?

Hier tritt, in ganz einfacher Form, die *Wahrscheinlichkeitstheorie* auf den Plan: Der Tod bzw. das Überleben der Frau wird als ein *zufälliges Ereignis* modelliert, ganz analog dem Aufwerfen einer Münze. Allerdings definieren wir die Chancen nun nicht mit 50:50, sondern wir gehen davon aus, dass vierzigjährige

Frauen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, die wir mit q_{40} bezeichnen, im Laufe des darauffolgenden Jahres versterben. Eine Sterbetafel (schreckliches Wort!) ist nichts anderes als eine Auflistung dieser Werte q_y und q_x, wobei y (bzw. x) die möglichen Alter (z.B. $0, 1, 2, \ldots, 110$) für Frauen (bzw. Männer) durchläuft.

Die Prämie für den Vertrag bestimmt sich nunmehr als der *Erwartungswert* der von den Versicherungs-Unternehmen zu erbringenden Leistung, in unserem Beispiel also

$$\text{Prämie} = q_{40} \cdot \text{Versicherungssumme.} \tag{1}$$

Wenn wir weiters annehmen, dass wir beispielsweise q_{40} mit 0.0012 ansetzen, (dieser Wert entspricht der Grössenordnung nach einer modernen Sterbetafel) erhalten wir

$$\text{Prämie} = 0,0012 \cdot 100.000\,€ = 120\,€. \tag{2}$$

Eine Kleinigkeit haben wir noch ausser Acht gelassen: während die Prämie am Anfang des Jahres zu zahlen ist, wird die Leistung der Versicherung erst am Ende des Jahres erbracht und der Verzinsungseffekt muss daher ebenfalls berücksichtigt werden. Dies geschieht dadurch, dass ein Rechnungszins (beispielsweise $i = 4\%$) festgelegt wird, und die Prämie noch mit diesem Zinsfuss abgezinst wird, also

$$\text{Prämie} = \frac{120}{1,04}\,€ \approx 115,38\,€. \tag{3}$$

So simpel dieses Verfahren scheinen mag: die skizzierte Vorgehensweise ist — in nuce — exakt das, was Versicherungsmathematiker seit Jahrhunderten tun: sie berechnen die Prämie als abgezinsten Erwartungswert der Versicherungsleistung.

Nun werden Sie vielleicht einwenden, dass die Versicherungsunternehmen auch Kosten (des Vertriebs, der Verwaltung etc.) haben, die ebenfalls berücksichtigt werden müssen. Das ist selbstverständlich richtig, und diese Kosten werden durch entsprechenden Zuschläge zu den Prämien berücksichtigt.

Doch wenn wir die Kosten einmal aussen vor lassen, was ist eigentlich der mathematische Kern der Verwendung des *Erwartungswerts* zur Berechnung der Prämie? Der Grund liegt im sogenannten *Gesetz der grossen Zahlen.* Es besagt folgendes: unter der Voraussetzung, dass die gewählte Wahrscheinlichkeit q_{40} tatsächlich die Sterblickeit von 40-jährigen Frauen korrekt modelliert, wird das Versicherungsunternehmen im Durchschnitt weder einen Gewinn noch einen Verlust erwirtschaften, wenn es „viele“, unabhängige Verträge dieser Art abschliesst. Was hier mit „viele“ gemeint ist, kann mathematisch exakt in Form von Grenzwertsätzen quantifiziert werden.

Nun aber zur Finanz-Mathematik, genauer zur stochastischen Finanz-Mathematik, die — zumindest auf den ersten Blick — grundsätzlich anders verfährt als die Versicherungs-Mathematik. Die Argumentation über das Gesetz der grossen Zahlen wird ersetzt durch den Begriff der „Arbitrage“.

Um diesen Begriff zu motivieren, betrachten wir wieder ein ganz einfaches Beispiel: Wenn in Frankfurt der Dollar mit $1,05$ US \$ pro € gehandelt wird, so wird er zum gleichen Zeitpunkt in New York zu (fast) dem gleichen Preis gehandelt: falls nämlich dort der Preis beispielsweise $1,0499$ US \$ pro € beträgt, so werden sofort *ArbitrageurInnen* auf den Plan treten, die gleichzeitig in New York € gegen US \$ und in Frankfurt US \$ gegen € tauschen und damit einen risikolosen Gewinn erzielen. Falls umgekehrt der Preis in New York $1,0501$ US \$ pro Euro beträgt, wird man/frau die Transaktionen in umgekehrter Richtung durchführen und ebenfalls einen risikolosen Gewinn erzielen. Bei einem umgetauschten Volumen von beispielsweise 10 Mio. € (eine vergleichsweise moderate Summe im globalen Devisenhandel, bei der sich die Transaktionen innerhalb von Sekunden durchführen lassen) beträgt der Arbitrage-Gewinn bei den angenommenen Zahlenwerten immerhin etwa 950 €.

Ob man dieses reibungslose Funktionieren der internationalen Finanzmärkte gut oder schlecht findet, ist eine andere Frage, die wir hier nicht analysieren wollen: wenn sich der von J. Tobin (Ökonomie-Nobelpreis 1981) gemachte Vorschlag durchsetzen liesse, durch eine globale Umsatzsteuer auf Finanztransaktionen (in der Grössenordnung eines Bruchteils eines Promilles) etwas Sand in das gut geölte Getriebe zu werfen, würde sich die Situation rasch verändern.

Aber zurück zum Begriff der Arbitrage: sie werden vielleicht einwenden, dass schliesslich jeder Schuhhändler, der ein Paar Schuhe um 30 € einkauft und später um 60 € verkauft, auch so etwas ähnliches wie Arbitrage macht; der Unterschied besteht aber darin, dass die Leistung des Schuhändlers darin besteht, den Kunden zu finden, den Lieferanten zu kontaktieren, die Schuhe zu lagern, etc. Im Gegensatz dazu sind Börsen so konstruiert, dass die Preise für alle Marktteilnehmer transparent sind und grosse Volumina mit geringen Transaktionskosten abgewickelt werden können. In unserem Devisen-Beispiel werden der ArbitrageurIn zwar wegen der Transaktionskosten nicht die vollen 950 € als Arbitrage-Gewinn verbleiben, aber für die „big players“ ist die relative Bedeutung der Transaktionskosten ausserordentlich niedrig.

Nun können wir einen wesentlichen Grundpfeiler der Theorie definieren, wie sie von F. Black, M. Scholes und R. Merton in ihren 1973 erschienenen Arbeiten verwendet wurde: Bei der mathematischen Modellierung des Geschehens auf den Finanzmärkten haben die Autoren — in erster Näherung — die Transaktionskosten ignoriert und das „No-Arbitrage-Prinzip“ zugrunde gelegt: Im mathematischen Modell eines Finanzmarktes soll es keine Arbitrage-Möglichkeiten geben. Das plausible Argument dahinter: sobald sich auch nur geringe Arbitrage-Möglichkeiten ergeben, treten wie im vorangehenden Beispiel ArbitrageurInnen auf den Plan, die — gerade dadurch, dass sie die Arbitragemöglichkeiten ausnutzen — diese rasch zum Verschwinden bringen. Bei liquiden Finanzmärkten, z.B. Devisen-Märkten, aber auch grossen Aktien- oder Waren-Märkten, kommt die Realität diesem mathematischen Postulat sehr nahe.

Wir wollen dieses No-Arbitrage-Prinzip an einem etwas weniger simplen Beispiel als dem der oben skizzierten „Platz-Arbitrage“ verdeutlichen, nämlich an Hand des *forward Kurs* einer Währung: Ich kann heute ein Termingeschäft abschliessen *(forward contract)*, mit dem ich *das Recht und die Pflicht* erwerbe, zu einem fixierten Zeitpunkt, z.B. in einem Jahr, einen bestimmten Betrag, z.B. 10.000 €, zu einem heute vereinbarten Kurs in US \$ zu wechseln.

Um diesen Vertrag abschliessen zu können, muss ein anderer Marktteilnehmer bereit sein, den Vertrag in die andere Richtung abzuschliessen, d.h. das Recht und die Pflicht zu erwerben, in einem Jahr die entsprechende Menge von US $ zum vereinbarten Kurs in € umzutauschen.

Der *forward Kurs* für den US $ ist derjenige Kurs, zu dem die Akteure an den Finanzmärkten heute bereit sind, diese Verträge zu kontrahieren.

Kann man nun irgendetwas Intelligentes über die Höhe des forward Kurs aussagen, das über die lapidare Feststellung hinausgeht, dass sich dieser Preis gemäss Angebot und Nachfrage auf den Termin-Märkten für Devisen einpendeln wird? Die Antwort lautet ja, und sie ist verblüffend simpel.

Nehmen wir der Einfachkeit halber an, dass heute das Zins-Niveau für einjährige „risikolose" Veranlagungen (das sind - in erster Näherung - Staatsanleihen mit einjähriger Restlaufzeit) in € und US $ gleich hoch ist. Ich behaupte, dass dann der forward Kurs für den € in US $ mit dem heutigen („Spot" oder „Kassa") Kurs des € in US $ übereinstimmen muss. Denn nehmen wir beispielsweise an, dass der forward Kurs für den € höher ist als der Kassa-Kurs, z.B. $1,06$ versus $1,05$ US $. Eine ArbitrageurIn wird sich in diesem Fall heute US $ für ein Jahr ausleihen, in € umtauschen, für ein Jahr in € veranlagen, und gleichzeitig einen *forward contract* abschliessen, die (aufgezinste) Summe von € in einem Jahr wieder in US $ zurücktauschen. Unsere Annahme, dass die Zinsen in US $ und € dieselbe Höhe haben, impliziert, dass das Ergebnis dieser Kombinationen von Transaktionen gleich null sein müsste, sofern der Kassa-Kurs gleich dem forward Kurs wäre. Wenn der forward Kurs allerdings höher als der Kassa-Kurs ist, so verbleibt der ArbitrageurIn die Differenz als Gewinn! Das Bemerkenswerte an diesem Arbitrage-Geschäft ist, dass dieser Gewinn ohne Netto-Einsatz von Kapital und vollkommen risikolos erzielt wird: der Gewinn entsteht unabhängig davon, ob im darauffolgenden Jahr der Kurs des Euro gegenüber dem Dollar steigt, fällt, oder gleichbleibt. Es ist das Wesen eines Arbitrage-Gewinns, dass er aus einer Kombination von Transaktionen besteht, von denen jede einzelne riskant - teilweise hoch riskant - ist, dass sich die gegenläufigen Risken aber wechselseitig aufheben.

Die aufmerksame LeserIn wird einwenden, dass wir dasselbe Niveau der Verzinsung einmal für einen Kredit (in US $) und einmal für eine Veranlagung (in €) verwendet haben; andererseits wissen wir alle, dass für Kredite höhere Zinsen zu zahlen sind, als durch risikolose Veranlagungen (in derselben Währung) zu erziehlen sind (wenn es umgekehrt wäre, liesse sich in offensichtlicher Weise ein Arbitrage-Geschäft machen). Nun ja, mit dem Argument verhält es sich ganz ähnlich, wie mit den Transaktionskosten: für kleine Investoren ist diese Differenz sehr wesentlich; für die „big players" ist es aber so, dass sie de facto zu denselben Konditionen „long" oder „short" gehen können, d.h. im Kontext unseres Beispiels, Geld für ein Jahr risikolos veranlagen oder ausleihen können.

In einem nächsten Schritt wollen wir die vereinfachende Annahme fallen lassen, dass die Zinsen (für einjährige, risikolose Veranlagungen) in US $ und € gleich hoch sind: nehmen wir beispielsweise an, dass die entsprechenden \$-Zinsen 4% betragen, während die €-Zinsen nur die Höhe von 3% haben. Wenn man das oben entwickelte Argument noch einmal durchdenkt, sieht man unmittelbar, dass es sich auch auf diese Situation übertragen lässt: der einzige Unterschied besteht darin, dass nunmehr das Verhältnis zwischen forward Kurs des Euro in Dollar und dem Kassakurs nicht mehr $1 : 1$ sondern nunmehr $1,04 : 1,03$ betragen muss.

An dieser Stelle empfehlen wir der skeptischen LeserIn, den Finanz-Teil einer Tageszeitung zur Hand zu nehmen, und empirisch nachzuprüfen, dass diese Überlegungen nicht nur graue Theorie sind. Die LeserIn wird sich davon überzeugen können, dass die Höhe des forward Kurses zwischen zwei Währungen tatsächlich vom Verhältnis des Zinsniveaus in den betreffenden Währungen - und nur davon! - in der oben skizzierten Weise abhängt. Und dies ist nicht deswegen der Fall, weil eine Aufsichtsbehörde darüber wacht oder dergleichen (wie das ja auch im Beispiel der Platz-Arbitrage nicht der Fall war), sondern deswegen, weil weltweit MarktteilnehmerInnen sofort jede sich bietende Arbitrage-Möglichkeit ausnützen und sie eben dadurch wieder zum Verschwinden bringen (oder genauer: auf ein so geringes Mass reduzieren, dass auch ArbitrageurInnen mit sehr geringen relativen Transaktionskosten davon nicht mehr profitieren können). Dies gilt jedenfalls für Währungen, in denen sowohl die Kassa- wie die Termin-Märkte eine entsprechende Liquidität (d.h., hohe Transaktionsvolumina und geringe Transakionskosten) aufweisen. Euro versus US Dollar ist hierfür selbstverständlich ein Paradebeispiel.

Für unsere bisherigen Überlegungen zum Thema Arbitrage haben wir nur ganz elementare mathematische Überlegungen anstellen müssen. Dies ändert sich aber schlagartig, wenn wir nun zu anderen Kontrakten übergehen, die auf Terminbörsen gehandelt werden: eine Option (genauer: eine Eurpäische Call-Option) verbrieft das *Recht aber nicht die Pflicht* von einem zugrundeliegenden Finanztitel („underlying stock“, z.B. Fremdwährung, Aktie etc.) zu einem bestimmten Ausübungs-Zeitpunkt („expiration time“) und zu einem bestimmten Ausübungs-Preis („strike price“) eine bestimmte Menge zu kaufen. Zur Illustration der wirtschaftlichen Sinnhaftigkeit solcher Verträge: Im vorhergehenden Devisen-Beispiel könnte es für die InvestorIn gute Gründe geben, sich nur das Recht zu sichern, in einem Jahr zu einem vereinbarten Kurs Euro in US Dollar zu tauschen, um sich gegen einen steigenden Dollar-Kurs abzusichern, sich aber nicht zu dieser Transaktion zu verpflichten, was im Fall von fallenden Dollar-Kursen zu empfindlichen Verlusten führen könnte.

Selbstverständlich ist der Erwerb einer solchen Option nicht mehr — wie beim forward contract — zum Preis null möglich, sondern die KäuferIn muss für den Erwerb der Option einen Preis zahlen.

Wieder stellt sich die Frage, ob wir über diesen Preis irgendetwas Intelligentes aussagen können, oder ob wir ausschliesslich auf die Marktkräfte verweisen müssen. Auch diesmal lautet die Antwort auf diese Frage ja; aber nun ist die Situation nicht mehr so einfach wie bei den oben betrachteten forward Kursen.

Bei diesen hatte es ausgereicht, sogenannte „buy-and-hold strategies“ zu betrachten: wenn wir das Argument zur Bestimmung des eindeutigen arbitragefreien forward Kurses noch einmal Revue passieren lassen, so sehen wir, dass nur vier Transaktionen (ein Kredit, eine Veranlagung, eine Währungsumtausch zum Kassa-Kurs sowie ein forward Kontrakt) dafür notwendig waren. Um den

Arbitrage-Gewinn zu lukrieren (falls der forward Kurs nicht die von der Theorie postulierte Höhe hat), kann die ArbitrageurIn diese vier Transaktionen heute abschliessen und schlicht ein Jahr zuwarten, um dann durch vertragsgemässe Erfüllung der Rechte und Pflichten einen risikolosen Gewinn zu erzielen („buy and hold").

Zum Aufspüren von Arbitrage-Möglichkeiten im Kontext von Optionen funktionieren diese elementaren Strategien nicht mehr. Man kann sich relativ leicht überlegen (und auch mathematisch präzise beweisen), dass man aufgrund von Arbitrage-Argumenten für buy-and-hold Strategien keine nicht-trivialen Aussagen über den Preis einer Option erzielen kann.

Aber der Markt erlaubt ja nicht nur „buy-and-hold", also statische Handels-Strategien, sondern es ist auch möglich, dynamisch zu handeln, in der mathematischen Modellierung: „in stetiger Zeit"; wir nennen eine Handelsstrategie „dynamisch", wenn sie grundsätzlich jederzeit Käufe und Verkäufe zulässt, wobei aber selbstverständlich nur die zum jeweiligen Zeitpunkt verfügbare Information verwendet werden darf (wenn ich Zugang zu den Börsenberichten von übermorgen hätte, wäre es natürlich nicht schwer, Arbitrage-Gewinne zu machen). Die Mathematik hat mit der Theorie der stochastischen Prozesse, die hauptsächlich in Hinblick auf die Anwendungen in den Naturwissenschaften entwickelt wurde, ein hervorragendes Instrumentarium zur Verfügung, um dieses Konzept einer „dynamischen Handelsstrategie" präzise zu modellieren (Stichwörter: Filtrationen, vorhersehbare Prozesse etc.)

Je grösser die Möglichkeiten sind, auf Finanzmärkten zu handeln, umso mehr Möglichkeiten bieten sich, gegenläufige Risken zu kompensieren und umso eher können No-Arbitrage-Argumente zur Bewertung herangezogen werden.

Um die möglichen Preisentwicklungen des der Option zugrundeliegenden Finanztitels („stock" oder „asset" auf neu-deutsch; z.B. die Aktie der Firma XYZ) zu modellieren, müssen wir Annahmen über den Preisprozess $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ machen: für jedes t in dem Intervall $[0,T]$ bezeichnen wir mit S_t den Kurs der Aktie zum Zeitpunkt t. Die Grösse T bezeichne den Ausübungs-Zeitpunkt der Option (z.B. in einem Jahr) und wir bezeichnen mit 0 das heutige Datum. Der heutige Preis S_0 ist uns bekannt; aber da wir nicht in die Zukunft blicken können, modellieren wir die Variablen S_t, für $0 \leq t \leq T$, als *zufällige Grössen*. Um den Prozess $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ zu spezifizieren, müssen wir nunmehr Annahmen über die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Zufallsvariablen S_t treffen.

Dieses Thema ist keineswegs neu, sondern bereits im Jahr 1900 hat L. Bachelier in einer Dissertation bei dem bedeutenden Mathematiker H. Poincaré ein Modell für den Preis-Prozess $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ einer Aktie vorgeschlagen, wobei seine Motivation schon damals darin bestand, eine *Formel zur Bewertung von Optionen* abzuleiten. Er modellierte den Preis der Aktie als einen Zufallsprozess (oder „stochastischen" Prozess). Dem entspricht die Vorstellung, dass die Frage, ob der Preis unserer Aktie morgen steigen oder fallen wird, nur in ähnlicher Weise beschrieben werden kann wie das Aufwerfen einer Münze oder der Lauf der Roulette-Kugel. L. Bachelier hatte einen geradezu mythischen Glauben, dass ein „Wahrscheinlichkeitsgesetz" das Geschehen auf den Börsen bestimme:

Si, á l'égard de plusieurs questions traitées dans cette étude, j'ai comparé les résultats de l'observation à ceux de la théorie, ce n'était pas pour vérifier des formules établies par les méthodes mathématiques, mais pour montrer seulement que le marché, à son insu, obéit à une loi qui le domine: la loi de la probabilité.

Als konkretes Modell schlug er den Prozess $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ vor, den wir heute die „Brown'sche Bewegung" nennen: die Veränderungen $S_t - S_u$ des Preises zwischen zwei Zeitpunkten $u < t$ wird als normalverteilt angenommen (das ist die berühmte „Gauss'sche Glockenkurve"), mit Mittelwert 0 und Varianz proportional der Länge des Intervalls $[u, t]$. Ausserdem sollen die Veränderungen während disjunkter Zeitintervalle unabhängig voneinander sein.

Für ein festes Zufallselement ω, d.h. für ω im zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, erhält man dann einen Pfad $(S_t(\omega))_{0 \leq t \leq T}$; ein typischer simmulierter Verlauf ist in der folgenden Graphik skizziert

Abb. 1: Pfad einer Brown'schen Bewegung

Es gereicht der Finanzmathematik zu Stolz und Ehre, dass L. Bacherlier damit der erste war, der das mathematische Modell einer „Brown'schen Bewegung" formulierte. Er war damit um 5 Jahre früher dran als A. Einstein und M. Smoluchowski, die dieses Modell in der Physik um 1905 einführten, um das Verhalten von Gas-Molekülen zu beschreiben. Der Name „Brown'sche Bewegung" leitet sich daher ab, dass der Botaniker R. Brown im Jahr 1826 bei der Beobachtung von Teilchen im Mikroskop ein völlig erratisches Verhalten — ähnlich wie bei dem in Abb. 1 simulierten Pfad — festgestellt hat (allerdings ohne auch nur den Versuch zu unternehmen, dieses von ihm verbal beschriebene Verhalten durch eine mathematische Konstruktion zu modellieren).

Nach der Formalisierung des Modells konnte Bachelier nunmehr dem eigentlichen Zweck seiner Arbeit näherkommen, nämlich der Bewertung einer Option auf eine Aktie, deren Preisprozess durch eine Brow'nsche Bewegung $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ modelliert wird. Wenn wir den Ausübungszeitpunkt T und den Ausübungspreis K fixieren, so ist es leicht, den Wert C_T der Option *zum Zeitpunkt* T anzugeben, nämlich

$$C_T = (S_T - K)_+ = \max\{S_T - K, 0\}. \tag{4}$$

In der Tat: Wenn der Preis S_T der zugrundeliegenden Aktie grösser als K ist, so beträgt der Wert der Option die Differenz $S_T - K$, da die BesitzerIn der Option eine Aktie zum Preis K kaufen kann, die sie sofort wieder zum Preis S_T verkaufen kann. Wenn S_T aber kleiner als K ist, so ist die Option schlicht wertlos.

Wir sehen also, dass wir den Wert C_T der Option zum Zeitpunkt T als eine einfache Funktion der Zufallsvariablen S_T schreiben können. Wir kennen allerdings den tatsächlichen Wert, den S_T zum Zeitpunkt $t = T$ annehmen wird, heute (d.h. zum Zeitpunkt $t = 0$) noch nicht, sondern nur die *Wahrscheinlichkeitsverteilung* von S_T. Um den Unterschied noch einmal mit einem simplen Beispiel zu illustrieren: Wenn ich würfle, so weiss ich vorher das Ergebnis des Wurfs nicht, ich postuliere aber — und bei einem korrekt gebauten Würfel habe ich gute Gründe dafür — , dass die Wahrscheinlichkeits-Verteilung für das Ergebnis so ist, dass jeder der 6 möglichen Ziffern mit gleicher Chance (also Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$) gewürfelt wird. In analoger Weise kenne ich heute den Wert S_T der Aktie nicht, ich postuliere aber, dass ich die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_T kenne.

Wie können wir nun den heutigen Wert C_0 der Option berechnen? Bachelier geht dafür genauso vor, wie es die Versicherungsmathematiker seit alters her tun: er nimmt den *Erwartungswert* des Werts von C_T, i.e.,

$$C_0 = E[C_T] \tag{5}$$

Dies ist ein Ausdruck, der leicht explizit ausgerechnet, d.h., durch eine „Formel" ausgedrückt werden kann, da wir ja — gemäss unserer Modell-Annahme — die Verteilung von S_T kennen, nämlich eine Normalverteilung mit Mittelwert S_0 und Varianz T.

Man mag einwenden, dass L. Bachelier den Verzinsungseffekt vernachlässigt hat, den wir bei der Besprechung der Todesfall-Versicherung berücksichtigen mussten. Dieser Einwand wiegt aber nicht sehr schwer: Bachelier ignorierte den Verzinsungseffekt, da er an der Bewertung von Optionen mit relativ kurzer Laufzeit (T in den Grössenordnungen von wenigen Monaten) interessiert war, und die Zinsen damals niedrig waren (auch zu Zeiten des vergangenen fin-de-siécle waren die Zinssätze niedrig und die Aktienkurse hoch!). Wenn man allerdings den Verzinsungseffekt berücksichtigen will, ist es selbstverständlich kein Problem in die Formel einen Abzinsungsfaktor einzubauen, wobei r den risikolosen Zins bezeichne:

$$C_0 = e^{-rT} E[C_T] \tag{6}$$

Der entscheidende Punkt ist aber ein anderer: Die Motivation hinter der Verwendung des Erwartungswertes ist das Gesetz der grossen Zahlen, das ökonomisch viel weniger überzeugend ist als die No-Arbitrage-Argumentation. Bei L. Bachelier finden wir die Idee einer Verbindung zwischen diesen beiden Ansätzen noch nicht.

Der Arbeit von Bachelier wurde zu ihrer Zeit leider nicht die gebührende Aufmerksamkeit zuteil: von Seiten der Ökonomen wurde sie vollkommen ignoriert und erst 65 Jahre später griff der berühmte Ökonom P. Samuelson (Ökonomie-Nobelpreisträger 1970) dieses Thema aus Sicht der Ökonomie wieder auf. Aber auch die Mathematiker nahmen wenig Notiz davon. Allerdings wurde seine Arbeit in dieser scientific community nicht vollständig vergessen; sie wird beispielsweise in dem 1932 erschienenen grundlegenden Buch von A. Kolmogoroff über Wahrscheinlichkeitstheorie zitiert.

Der wirkliche Durchbruch in der Frage der Optionsbewertung gelang aber erst mit den 1973 publizierten Arbeiten von F. Black und M. Scholes sowie R. Merton. Sie legten dem Aktienkurs als Modell eine leichte Variation des von L. Bachelier verwendeten Modells zugrunde: sie postulierten — wie vor ihnen bereits Samuelson —, dass der *Logarithmus* $\ln(S_t)$ des stock-Preis-Prozess S_t einer Brown'schen Bewegung mit Drift folgt, also

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \sigma W_t + \mu t, \tag{7}$$

wobei $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ geeignete Normierungskonstanten sind und W_t eine Brown'sche Bewegung ist, wie sie von L. Bachelier definiert wurde.

Der Übergang zu den Logarithmen ist ein eher harmloser Schritt und entspricht dem Unterschied zwischen kontinuierlicher Verzinsung, bei der sich ein investiertes Kapital gemäss einer Exponentialkurve entwickelt, und linearer Verzinsung ohne Berücksichtigung des Zinseszins-Effekts. Bekanntlich ist der Unterschied zwischen diesen beiden Vorgehensweisen (für kurze Zeiträume!) nicht sehr bedeutend. Ähnlich verhält es sich mit dem Unterschied zwischen Bachelier's Modell der Brown'schen Bewegung und dem Modell (7) der sogenannten „geometrischen Brown'schen Bewegung", das heute auch oft als „Black-Scholes-Modell" bezeichnet wird.

Im nächsten Schritt betreten Black, Scholes und Merton aber Neuland, indem sie ein No-Arbitrage-Argument unter Verwendung von dynamischen Handelsstrategien benutzen. Im Kern läuft dieses Argument so: *Nehmen wir einmal an*, dass es tatsächlich eine Funktion $f(t, S)$ gibt, die den Wert der Option zu jedem Zeitpunkt $0 \leq t \leq T$ in Abhängigkeit vom Preis S des Underlyings zum Zeitpunkt t angibt. Dann kann man diese Funktion $f(t, S)$ nach der Variablen S partiell differenzieren. Für festes t und S bezeichnen wir — in der Sprache der Praktiker — diese Grösse $\frac{\partial}{\partial S} f(t, S)$ als das „Delta" der Option zum Zeitpunkt t bei aktuellem stock-Preis S.

Zur Illustration nehmen wir zum Beispiel an, dass — für festes t und S — dieses „Delta" den Wert $\frac{1}{2}$ betrage. Dies bedeuted, dass bei einer Änderung des Werts S des Underlyings um 1 € (während t fest bleibt) der Wert der Option um etwa 50 Cent steigt. Das „etwa" ist im Sinn der Differentialrechnung zu verstehen, dass dieses Verhältnis von 2 : 1 der Wert-Änderung des Underlyings und der Option umso besser gilt, je kleiner die Preisänderungen sind, und „im Limes“ exakt zutrifft.

Diese Relation hat eine wichtige ökonomische Konsequenz: wenn wir — immer bei festem t und S — ein Portefeuille bilden, indem wir mit einer Einheit des Underlyings „long“ gehen (es also kaufen) und gleichzeitig mit zwei Einheiten der Option „short“ gehen (sie also verkaufen), so ist dieses Portefeuille risikolos gegenüber (kleinen) Preisänderungen des Underlyings: Kursgewinne für das Underlying werden durch Kursverluste bei den Optionen kompensiert und vice versa.

Diese Risikolosigkeit des Portefeuilles gilt zwar nur „lokal“, d.h. solange sich t und S nur wenig ändern, aber die Idee einer dynamischen Handelsstrategie erlaubt es, die Zusammensetzung des Portefeuilles durch Käufe und Verkäufe jeweils dem aktuellen „Delta“ anzupassen.

Nun kommt das No-Arbitrage-Argument: Ein in solcher Weise risikoloses Portefeuille muss dieselbe Verzinsung erreichen wie eine risikolose Veranlagung. Wenn dem nämlich nicht so wäere, könnte man auf Basis der vorausgegangenen Überlegungen Handeslsstrategien finden, die Arbitrage-Gewinne ermöglichen.

Damit haben wir einen ökonomischen Zusammenhang zwischen der Wertentwicklung des Portfeuilles und der risikolosen Verzinsung gefunden, der sich mathematisch in Form einer Gleichung ausdrücken lässt: wenn wir die Modellannahme (7) zugrundelegen, so führt das auf eine *partielle Differentialgleichung*, die explizit gelöst werden kann. Die Lösung lässt sich in Gestalt einer *Formel* angeben, nämlich durch die berühmte Black-Scholes Formel:

$$\begin{aligned} f(t,S) &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2), && (8)\\ \text{wobei } d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} && (9)\\ d_2 &= \frac{\ln(S/K) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. && (10) \end{aligned}$$

Hier bezeichnet N die Verteilungsfunktion der Standard-Normal-Verteilung, S den Wert des Underlyings zum Zeitpunkt t, K und T den Ausübungspreis und Ausübungszeitpunkt der Call-Option, r die risikolose Zinsrate und $\sigma > 0$ die „Volatilität“, d.h. den Parameter für den Einfluss der zufälligen Brown'schen Bewegung W im zugrundeliegenden Modell (7).

Die konkrete Gestalt der Formel ist für uns nicht so wesentlich und ich habe sie hier nur angegeben, um der LeserIn vor Augen zu führen, dass diese Formel für konkrete Zahlenwerte tatsächlich explizit ausgerechnet werden kann.

Wesentlicher ist folgendes: Wir erhalten den heutigen Wert $f(0, S_0)$ der Call-Option nunmehr als den *einzig möglichen arbitragefreien Preis*. Mehr noch: die Abteilung der Formel führt auch ganz explizit zu dynamischen Handelsstrategien, mit denen Arbitragegewinne gemacht werden können, falls der Marktpreis der Option von diesem theoretischen Wert abweicht.

Schliesslich folgt noch eine verblüffende Überraschung: der Preis $f(0, S_0)$ ergibt sich auch aus dem Ansatz, der der Bachelier-Formel (6) entspricht,

$$f(0, S_0) = e^{-rT} E_Q[C_T], \qquad (11)$$

wobei wir allerdings nunmehr den Erwartungswert nicht mehr bezüglich des ursprünglich zugrunde gelegten Wahrscheinlichkeitsmass P bilden, sondern bezüglich eines modifizierten, sogenannten „risikoneutralen" Wahrscheinlichkeitmasses Q. Die Bezeichnung „risikoneutral" kommt daher, dass bei Zugrundelegung dieser modifizierten Wahrscheinlichkeitsverteilung die Wertsteigerung des stocks im Durchschnitt gleich derjenige der risikolosen Veranlagung ist.

Eine genauere Begründung für diesen fundamentalen Zusammenhang zwischen No-Arbitrage-Argumenten einerseits und dem spektakulären revival (11) des guten alten versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzips andererseits würde den Rahmen dieses Vortrags sprengen. Er ist das Thema des sogenannten „Fundamental Theorem of Asset Pricing", das um etwa 1980 in den Arbeiten von M. Harrison, D. Kreps und S. Pliska entwickelt und später von zahlreichen Autoren erweitert wurde. Eine exakte Formulierung dieses Fundamental-Satz in einem allgemeinen, mathematisch präzisen Rahmen wurde erst 1994 durch F. Delbaen und den Autor gegeben.

Wir wollen hier nur einen ganz intuitiven Zugang entwickeln, was bei diesem Übergang des ursprünglichen „wahren" Wahrscheinlichkeitsmass P zum modifizierten „risikoneutralen" Wahrscheinlichkeitsmass Q eigentlich passiert. Blenden wir noch einmal zurück zu dem ganz einfachen Beispiel der einjährigen Risiko-Versicherung für eine 40-jährige Frau. Wahrscheinlich haben Sie oben mit Verwunderung und Skepsis darauf reagiert, dass die Versicherungsunternehmen die Prämie unter Verwendung des Erwartungswert berechnen; denn das hiesse ja, dass die Versicherungsunternehmen im Durchschnitt an diesen Verträgen nichts verdienen. Diese Skepsis ist nur allzuberechtigt, denn Versicherungen sollen ja gewinnorientierte Unternehmen sein.

Des Rätsels Lösung liegt darin, dass auch hier mit zwei verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen operiert wird: auf der einen Seite gibt es die „wahre" Wahrscheinlichkeit q_{40}, mit der eine 40-jährige Frau im Lauf eines Jahres verstirbt; diese „wahre" Wahrscheinlichkeit kann aufgrund der in der Vergangenheit beobachteten Sterblichkeiten sehr verlässlich geschätzt werden. Zur Berechnung der Prämien wird aber eine andere — vorsichtig gewählte — Wahrscheinlichkeit verwendet, die wir mit q_{40}^{mod} bezeichnen wollen. Die Sterblichkeitsgewinne der Versicherung resultieren daher aus der Differenz dieser beiden Werte.

Die Parallele zur Finanzmathematik wird nun offensichtlich, wo es ebenfalls wesentlich ist, zwischen dem „wahren" Mass P und dem „modifizierten" Mass Q zu unterscheiden.

Nach diesen allgemeinen Überlegungen stellt sich nun die Frage, wie gut die Black-Scholes-Formel und die daraus abgeleiteten Hedging-Strategien in der Praxis funktionieren. Diese Frage läuft im wesentlichen darauf hinaus, ob das Modell der geometrischen Brown'schen Bewegung (7) die Wirklichkeit korrekt beschreibt.

Werfen wir einen Blick auf reale Datensätze aus Finanzmarktzeitreihen. In der folgenden Graphik haben wir die täglichen logarithmischen Returns, d.h. $\ln(S_{t+1}/S_t)$, eines österreichischen Aktienpreis-Index dargestellt, wobei t

die Handelstage von April 95 bis Juni 98 durchläuft. Wenn die Annahmen des Black-Scholes Modells zuträfen, müssten diese zufälligen Grössen normalverteilt sein, d.h., das empirische Histogramm müsste ungefähr die From der strichlierten Normalverteilung haben.

Abb. 2: ATX Log-Returns (April 1995 - Juni 1998):
Vergleich zur Normalverteilung

Man sieht, dass der Fit nicht allzu gut ist: während das empirische Histogramm in der Nähe des Mittelwertes zuviel Masse hat (im Vergleich zur theoretischen Normalverteilung), fehlt diese Masse in einem mittleren Bereich. Das für die praktische Anwendung schwerwiegendste Problem springt aber weniger ins Auge und besteht an den „Enden“ der Verteilung: die Normalverteilung unterschätzt in dramatischer Weise die extremen Ereignisse; und gerade diese Ereignisse von grossen Kurs-Schwankungen sind offensichtlich von besonderer praktischer Relevanz.

Diese „stylized facts“, die wir in diesem Beispiel beobachten (i.e., im Vergleich zur Normalverteilung zu viel Wahrscheinlichkeitsmasse im Zentrum und an den Enden der Verteilung, andererseits zu wenig in einem mittleren Bereich), treten mit bemerkenswerter Persistenz immer wieder bei solchen Zeitreihen auf.

Anstatt der Approximation durch die Normalverteilung gibt die nächste Graphik die Approximation desselben empirischen Histogramms durch eine allgemeinere Klasse von Wahrscheinlichkeitsverteilungen an, den sogenannten hyperbolischen Verteilungen. Der Fit ist um einiges besser und — obwohl man das mit freiem Auge an diesem Beispiel nicht sehen kann — belegen umfangreichere empirische Untersuchungen, dass auch die Modellierung der extremen

Schwankungen durch diese allgemeinere Klasse von Verteilungen besser mit der Realität übereinstimmt als dies die Normalverteilung leistet.

Abb. 3: ATX Log-Returns (April 1995 - Juni 1998):
Vergleich zu hyperbolischer Verteilung

Dies provoziert die Frage, warum wir nicht das Black-Scholes Modell durch allgemeinere Modelle ersetzen, die die Realität besser beschreiben. Genau dies tut die Forschung — und in zunehmendem Mass auch die Praxis —, wobei die Entwicklung stürmisch voranschreitet. Allerdings wird die Situation sofort wesentlich komplizierter, wenn man über das Black-Scholes Modell hinausgeht, da man dann nicht mehr aus reinen No-Arbitrage-Argumenten eindeutige Preise und entsprechende Handelsstrategien ableiten kann. Aus diesem Grund spielt für Praktiker das Black-Scholes Modell nach wie vor eine grundlegende Rolle, wobei aber auch die aktuellen Forschungsergebnisse mit bemerkenswerter Geschwindigkeit in die Praxis umgesetzt werden.

In diesem einführenden Vortrag können wir auf die Erweiterungen des Black-Scholes Modells nicht eingehen und nur auf die umfangreiche weiterführende Literatur verweisen. Ich hoffe aber, der LeserIn die folgende Botschaft vermittelt zu haben: für die praktische Anwendung der Theorie ist es ganz entscheidend, das gewählte mathematische Modell und seine Annahmen gründlich verstanden zu haben; dies ist insbesondere dafür notwendig, um ein Verständnis dafür zu entwickeln, in welchen Aspekten die Modell-Annahmen in akzeptabler Weise die Realität beschreiben, und in welchen Aspekten dies nicht der Fall ist. Dies schafft die Basis für ein kritisches Bewusstsein, in welchen Situationen die Theorie wertvolle Ergebnisse liefert und in welchen Situationen grösste Vorsicht angebracht ist.

Original-Arbeiten

[1] Bachelier, L. *Théorie de la spéculation.* Ann. Sci École Norm. Sup. 17 (1900), 21–86. [English translation in: The Random Character of Stock Market Prices, P.Cootner, ed. MIT Press, Cambridge (Mass.) 1964, pp. 17–78.

[2] Black, F., Scholes, M. *The pricing of options and corporate liabilities.* J. Political Econom. 81, 1973, 637–654.

[3] Harrison, J.M., Kreps, D.M. (1979), *Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets.* J. Econom. Theory 20, 381–408.

[4] Harrison, J.M., Pliska, S.R., *Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading.* Stochastic Processes and their Applications 11, (1981), pp. 215–260.

[5] Kreps, D. (1981) *Arbitrage and equilibrium in economies with infinitely many commodities.* J. Math. Econom. 8, 15–35.

[6] Merton, R.C. (1973), *Theory of rational option pricing.* Bell J. Econom. Manag. Sci. 4, 141–183.

[7] Delbaen, F., Schachermayer, W. *A General Version of the Fundamental Theorem of Asset Pricing.* Mathematische Annalen 300, (1994), pp. 463–520.

Lehrbücher

[8] Hull, J.C. *Options, futures and other derivatives.* Prentice-Hall International, 1997, ISBN 0-13-264367-7.

[9] Lamberton, D., B. Lapeyre *Stochastic Calculus Applied to Finance.* Chapman&Hall, 1996, ISBN 0-412-71800-6.

[10] Baxter, M., A. Rennie *Financial calculus.* Cambridge University Press, 1998, ISBN 0-521-55289-3.

[11] Björk, T. *Arbitrage Theory in Continuous Time.* Oxford University Press, 1999, ISBN 0-19-877518-0.

[12] Musiela, M., M. Rutkowski *Martingale Methods in Financial Mathematics.* Applications of Mathematics, Stochastic Modelling and Applied Probability 36. Springer, 1997, ISBN 3-540-61477-X.