Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.593 Einführung in Stochastische Prozesse und Zeitreihenanalyse
Vorlesung, 2012S, 2.0h
6.Dezember 2012 (Nikolaustag)
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, alle Unterlagen sind erlaubt)

Sie erhalten eine E-Mail mit dem schriftlichen Ergebnis und Information zur Anmeldung zur mündlichen Prüfung.

Bsp.	Max.	Punkte
1	5	
2	5	
3	5	
4	5	
$\sum$	20	

1. Gegeben sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Beschreiben Sie möglichst genau und konkret (Name und Parameter!) die gemeinsame Verteilung von $W(1), W(3), W(3) - W(2)$.

   (b) Wir betrachten die stochastischen Integrale
$$X(t) = \int_0^t I_{[1,3)}(s)dW(s), \quad Y(t) = \int_0^t sI_{[2,4)}(s)dW(s).$$

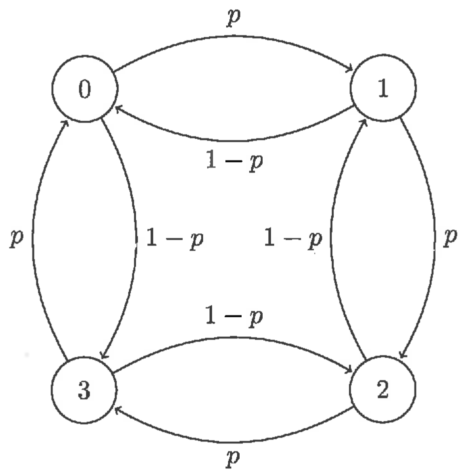
   (c) Geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $X(4)$ an. und berechnen Sie $\mathbb{E}[X(4)|\mathcal{F}(2)]$.

   (d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X(t)Y(t)]$ mit der Ito-Isometrie für $2 < t < 3$.

   (e) Sei
$$Z(t) = X(t) + e^{Y(t)}.$$
   Ist Z ein Martingal, ein Submartingal, ein Supermartingal, oder gar kein Smartingal? Kurze Begründung.

2. Gegeben ist ein white noise Prozess $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ mit $\sigma^2 > 0$. Betrachten Sie nun den Prozess (x_t), der definiert ist durch
$$x_t = -x_{t-1} + \epsilon_t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$
   und
$$x_0 = 0$$
   Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}x_t$ und die Autokovarianzfunktion $\gamma(x_t, x_s) = \mathbf{Cov}(x_t, x_s)$. Ist dieser Prozess (x_t) stationär?

3. Folgendes Diagramm beschreibt eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Dabei



   ist $0 < p < 1$.

   (a) Geben Sie die entsprechende Übergansmatrix P an.

   (b) Geben Sie die Verteilung von X_2 unter $\mathbb{P}_0$ an, d.h., berechnen[1] Sie $\mathbb{P}_0[X_2 = k]$ für alle $k \in S$.

   (c) Sei $H = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{0, 2\}\}$. Berechnen Sie $\mathbb{P}_i[H < \infty]$ für $i \in S$.

   (d) Berechnen Sie $\mathbb{E}_i[H]$ für $i \in S$.

   (e) Angenommen die Anfangsverteilung ist $\lambda_0 = \ldots \lambda_3 = 1/4$. Berechnen Sie damit $\mathbb{E}[H]$.

4. (x_t) sei ein stationärer Prozess mit Erwartungswert $\mathbb{E}x_t = 5$ und Autokovarianzfunktion $\gamma(0) = 2$, $\gamma(1) = 1$, $\gamma(2) = 0.5$, $\gamma(3) = 0.25$, $\gamma(4) = 0.125$, ... Berechnen Sie die (affine) Einschritt-Prognose von x_{t+1} aus zwei vergangenen Werten. Berechnen Sie auch die Varianz des entsprechenden Einschritt-Prognosefehlers. (Beachten Sie, dass der Erwartungswert von x_t ungleich null ist!)

[1] Hinweis: Kurz überlegen ist manchmal effizienter als lang rechen!