1. Gegeben ist ein MA(1) Prozess

$$x_t = \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}$$

wobei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ und $|b| < 1$.

   (a) Berechnen Sie die Einschrittprognose $\hat{x}_{t+1}$ aus einem vergangenem Wert ($\hat{x}_{t+1} = cx_t$) und die entsprechende Prognosefehlervarianz $\sigma_{1,1}^2$.

   (b) Wie groß ist die Varianz σ_1^2 des Fehlers der Einschrittprognose aus der unendlichen Vergangenheit? Hinweis: Überzeugen Sie sich, dass die strikte mini-phase Bedingung erfüllt ist.

   (c) Zeigen Sie

$$1 \leq \frac{\sigma_{1,1}^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{3}{2}$$

   Für welche Werte von b ist die Prognose aus einem vergangenem Wert im Vergleich zur Prognose aus der unendlichen Vergangenheit besonders schlecht?

2. Gegeben ist folgendes AR(2) System:

$$x_t = 0x_{t-1} + (3/4)x_{t-2} + \epsilon_t$$

wobei $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$ und $\sigma^2 = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Stabilitätsbedingung erfüllt ist.

(b) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma_x(k) = \mathbf{E}x_{t+k}x_t$ des Prozesses $(x_t \,|\, t \in \mathbb{Z})$.

(c) Wir betrachten nun den (stationären) Prozess

$$(y_t = x_t - (4/3)x_{t-2} \,|\, t \in \mathbb{Z}).$$

Zeigen Sie, dass (y_t) ein white noise Prozess ist. Hinweis: Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion $\gamma_y(k) = \mathbf{E}y_{t+k}y_t$ von (y_t) und zeigen Sie, dass $\gamma_y(k) = 0$ für $k \neq 0$ gilt.

3. Wieder einmal sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiter sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Sei
   $$f(t) = \sqrt{2} I_{[1,2)}(t) + \sqrt{3} I_{[3,5)}(t), \quad t \geq 0,$$
   dann gilt $f \in M^2_{\text{step}}$. Wir betrachten die stochastischen Integrale
   $$I_t(f) = \int_0^t f(s) dW(s), \quad t \geq 0, \qquad I(f) = \int_0^\infty f(s) dW(s).$$
   Geben Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für das stochastische Integral $I_t(f)$ an, wenn $3 < t < 5$ ist.

   (b) Finden Sie möglichst einfache Ausdrücke für $E[I(f)]$ und $\text{Var}[I(f)]$.

   (c) Sei $U(t) = e^{-t^2/4} W(t)$ für $t \geq 0$. Ist U in M^2? Ist Ihre Antwort 'ja', berechnen Sie $||U||_{M^2}$, andernfalls begründen Sie genau warum.

   (d) Es sei $Y(t) = t^2 W(t)^2$ für $t \geq 0$. Wenden Sie die Ito-Formel an und geben Sie Ihr Ergebnis in der ausführlichen Integral-Darstellung
   $$Y(t) = Y(0) + \int_0^t (\ldots) ds + \int_0^t (\ldots) dW(s), \quad t \geq 0$$
   an.

   (e) Gegeben sei ein allgemeiner Ito-Prozess, in der kurzen Differential-Notation $d\xi = a dt + b dW$. Sei[1] $Z(t) = \sin(t) \cos(\xi(t))$ für $t \geq 0$. Ist Z auch ein Ito-Prozess? Ist Ihre Antwort 'ja', wenden Sie die Ito-Formel an und geben Sie Ihr Ergebnis wieder in der kurzen Differential-Notation in der Form $dZ = (\ldots)dt + (\ldots)dW$ an. Eine genaue Begründung von Integrabilitätsbedingungen etc. ist dann nicht nötig. Ist ihre Antwort 'nein', geben Sie eine genau Begründung an.

[1] Sie wissen noch: $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

4. Gegeben sei eine Markovkette $(X_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, \dots, 6\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ und einer Übergangsmatrix P, die in untenstehender Abbildung als Übergangsgraph dargestellt ist. Sei[2]

$$H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 1\}, \qquad T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Kommunikationsklassen. (Ohne Begründung)

(b) Finden Sie eine Zahl $\alpha > 0$ sodass $\mathbb{P}_1[T = \infty] \geq \alpha$ gilt. (Mit kurzer Begründung bzw. Herleitung)

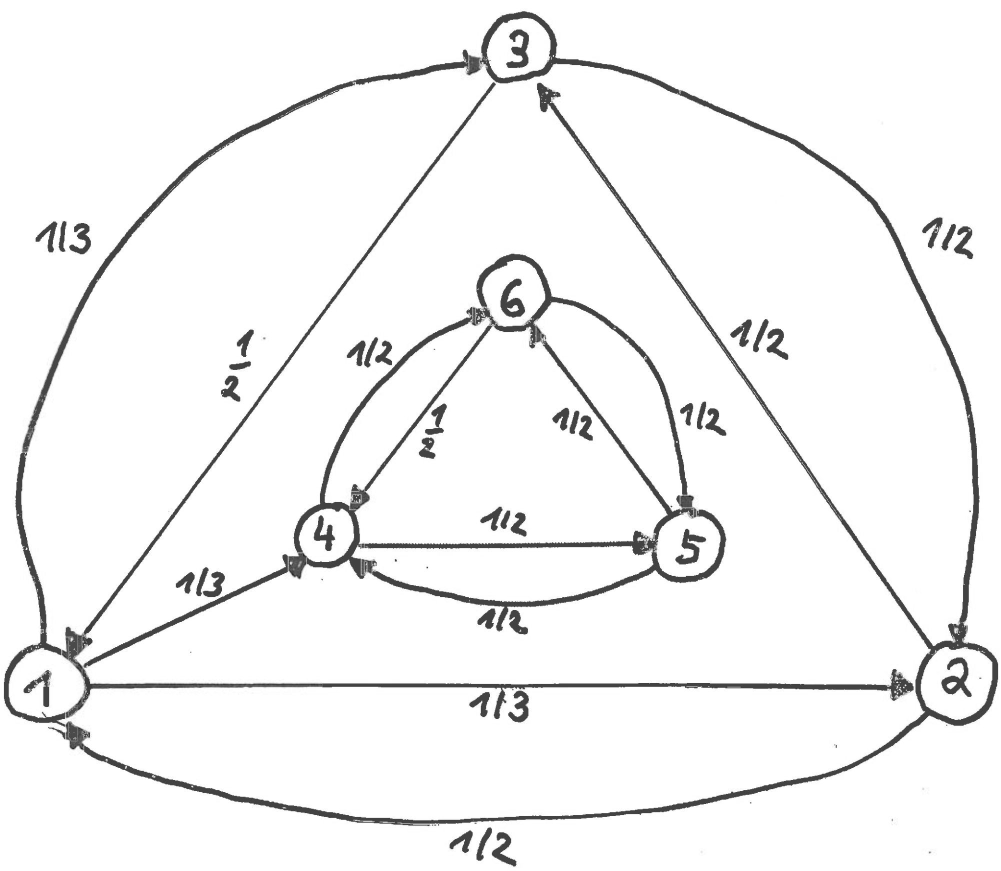
(c) Bestimmen Sie welche Klassen rekurrent und welche transient sind. (Kurze Begründung, die Definition von 'rekurrent' und 'transient' aufzuschreiben reicht aber nicht!)

(d) Berechnen Sie $\mathbb{P}_i[H < \infty]$ für alle $i \in I$.

(e) Ermitteln Sie möglichst effizient

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{66}^{(n)}.$$

(Notation wie in Buch und Vorlesung.)



[2]Die Formel genau lesen!