Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2023S, VO, 2.5h, 4.0EC
30. Juni 2023
Hubalek/Scherrer

90 Minuten

Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner sind erlaubt

Bsp.	Max.	Punkte	Bemerkungen
1	5		
2	5		
3	5		
4	5		
$\sum$	20		

1. (a) Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1,2\}$, Anfangsverteilung δ_2 und Übergangsmatrix

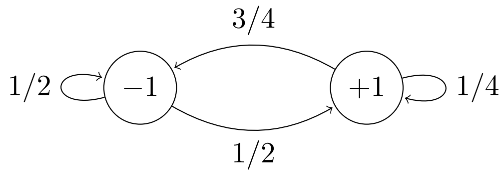
$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Weiters sei $\tilde{X}_n = X_{2n}$ für $n \geq 0$. Dann ist $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$ auch eine Markovkette.[1] Geben Sie einen geeigneten Zustandsraum $\tilde{I}$, die zugehörige Anfangsverteilung $\tilde{\lambda}$ und die entsprechende Übergangsmatrix $\tilde{P}$ für die Kette $(\tilde{X}_n)_{n\geq 0}$ an!

(b) Sei $(Y_n)_{n\geq 0}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $\{-1,+1\}$, Anfangsverteilung

$$\mathbb{P}[Y_0 = -1] = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}[Y_0 = +1] = \frac{2}{5},$$

und folgendem Übergangsgraph.



Berechnen Sie $\mathbb{P}[Y_n = -1]$ und $\mathbb{P}[Y_n = +1]$ für $n \geq 1$.

(c) (Fortsetzung) Ermitteln Sie

$$\sum_{n\geq 0} p_{ii}^{(n)}$$

für $i \in \{-1,+1\}$ für die Kette $(Y_n)_{n\geq 0}$ aus Aufgabe (b)!

(d) Gegeben sei eine Markovkette $(Z_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $\{1,2,3,4,5\}$, Anfangsverteilung $(1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/20)$ und Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Wie groß sind die Trefferwahrscheinlichkeiten $h_1, \ldots, h_5$ für die Menge $A = \{2,5\}$?

(e) (Fortsetzung) Berechnen Sie die erwarteteten Trefferzeiten $k_1, \ldots, k_5$ für die Kette $(Z_n)_{n\geq 0}$ und die Menge A aus Aufgabe (d)!

[1] Das müssen und sollen Sie nicht zeigen!

2. In dieser Aufgabe betrachten wir den AR(1) Prozess

$$x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + \epsilon_t, \quad (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = 1) \tag{1}$$

und den "Differenzen-Prozess":

$$y_t = (x_t - x_{t-1})$$

(a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung für das AR System (1).

(b) Zeigen Sie, dass die Autokovarianzfunktion von (x_t) gegeben ist durch:

$$\gamma_x(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$

(c) Zeigen Sie, dass die Autokovarianzfunktion von (y_t) gegeben ist durch:

$$\gamma_y(k) = \mathrm{Cov}(y_{t+k}, y_t) = \begin{cases} \frac{4}{3} & \text{für } k = 0 \\ -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} & \text{für } |k| > 0 \end{cases}$$

(d) Berechnen Sie die Einschrittprognose $\hat{x}_{t+1} = c_0 + c_1 x_t$ für x_{t+1} aus einem vergangenen Wert ($h = 1, k = 1$). Geben Sie die Koeffizienten c_0, c_1 und die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers an.

(e) Berechnen Sie die Einschrittprognose $\hat{y}_{t+1} = c_0 + c_1 y_t$ für y_{t+1} aus einem vergangenen Wert ($h = 1, k = 1$). Geben Sie die Koeffizienten c_0, c_1 und die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers an. Welche Prognose ((d) oder (e)) ist besser?

3. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Sei $0 < s < t$. Welche Verteilung hat $W(s) + W(t)$ (Name und Parameter) ?

   (b) Sei $V(t) = W(1) - W(t+1)$ für $t \geq 0$. Berechnen Sie $\mathrm{E}[V(t)|\mathcal{F}(1)]$ und $\mathrm{E}[V(t)^2|\mathcal{F}(1)]$ für $t \geq 0$.

   (c) Sei
$$g(t) = 1_{[0,1)(t)} + W\left(\frac{1}{2}\right) 1_{[1,2)}(t), \quad t \geq 0. \tag{2}$$
   Begründen Sie, warum $g \in M^2_{\text{step}}$ und geben Sie einen möglichst expliziten Ausdruck für das stochastische Integral $I_{4/3}(g)$ an.

   (d) Sei
$$f(t) = 1_{\{W(t)\geq 0\}} - 1_{\{W(t)<0\}}, \quad t \geq 0. \tag{3}$$
   Dann[2] ist $f \in M^2_T$ für alle $T > 0$. Somit ist
$$\hat{W}(t) = \int_0^t f(s)dW(s), \quad t \geq 0 \tag{4}$$
   wohldefiniert. Berechnen Sie $\mathrm{E}[\hat{W}(T)]$ und $\mathrm{Var}[\hat{W}(T)]$ für alle $T \geq 0$.

   (e) Ist der Prozess $(\xi(t), t \geq 0)$ mit
$$\xi(t) = \sin(W(t)), \quad t \geq 0, \tag{5}$$
   ein Ito-Prozess? Wenn ja, geben Sie ohne Begründung die entsprechende Darstellung
$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s)dW(s) + \int_0^t b(s)ds, \quad t \geq 0 \tag{6}$$
   mit
$$\xi(0) = \ldots, \quad a(s) = \ldots, \quad b(s) = \ldots, \quad s \geq 0 \tag{7}$$
   an, wenn nein, eine genaue Begründung, warum nicht.

[2] Das müssen und sollen Sie nicht zeigen!

4. (x_t) und (y_t) seien zwei, zueinander unkorrelierte, stationäre und zentrierte Prozesse. Das heißt:

$$\mathrm{E}\, x_t = 0,\ \mathrm{E}\, y_t = 0 \text{ und } \mathrm{E}\, x_t y_s = 0 \text{ für alle } t, s \in \mathbb{Z}.$$

Weiters seien $\gamma_x(k) = \mathrm{E}\, x_{t+k} x_t$ und $\gamma_y(k) = \mathrm{E}\, y_{t+k} y_t$ die Autokovarianzfunktionen von (x_t) bzw. (y_t).

Wir konstruieren nun einen Prozess (z_t) mit

$$\begin{aligned} z_{2s} &= x_s \\ z_{2s+1} &= y_s \end{aligned}$$

für $s \in \mathbb{Z}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Prozess (z_t) dann und nur dann stationär ist wenn $\gamma_x(k) = \gamma_y(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Für die folgenden Punkte setzen wir nun voraus, dass (z_t) stationär ist, dass also $\gamma_x(k) = \gamma_y(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt!

(b) Berechnen Sie die Autokovarianzfunktion von (z_t). D.h. Drücken Sie $\gamma_z(k) = \mathrm{Cov}(z_{t+k}, z_t)$ als Funktion von $\gamma_x(\cdot)$ aus.

(c) Wir nehmen nun zusätzlich an, dass (x_t) ein AR(1) Prozess ist: $x_t = a x_{t-1} + \epsilon_t$, $|a| < 1$ und $(\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2)$. Berechnen Sie die Einschrittprognose $\hat{z}_{t+1} = c_1 z_t + \cdots + c_k z_{t+1-k}$

   i. aus einem vergangenem Wert $(h = 1, k = 1)$,

   ii. aus zwei vergangenen Werten $(h = 1, k = 2)$ und

   iii. aus der unendlichen Vergangenheit.

   Geben Sie immer eine möglichst explizite Darstellung der Koeffizienten c_i und der Varianz $(\sigma^2_{h,k})$ der Prognosefehler.
   Hinweis zu Punkt iii: Zeigen Sie, dass die Prognose aus zwei vergangenen Werten auch schon die Prognose aus der unendlichen Vergangenheit ist.