Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift oder Bleistift verwenden!

105.695 Einführung in die Stochastischen Prozesse und Zeitreihen
2023S, VO, 2.5h, 4.0EC
20.Februar 2024
Hubalek/Scherrer

(Dauer 90 Minuten, Unterlagen: ein handbeschriebener A4-Zettel sowie ein nichtprogrammierbarer Taschenrechner sind erlaubt)

Bsp.	Max.	Punkte	Bemerkungen
1	5		
2	5		
3	5		
4	5		
$\sum$	20		

1. Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei eine Brownsche Bewegung $(W(t), t \geq 0)$ gegeben. Weiters sei $(\mathcal{F}(t), t \geq 0)$ die natürliche Filtration von W.

   (a) Gegeben sei eine Zufallsvariable $Z \sim N(0,1)$ und ein Prozess $(U(t), t \geq 0)$ mit

   $$U(t) = \sqrt{t}Z, \quad t \geq 0.$$

   i. Geben Sie die Verteilung von $U(t)$ für alle $t \geq 0$ an.

   ii. Berechnen Sie $\mathrm{Cov}[U(s), U(t)]$ für $0 < s < t$.

   (b) Gegeben sei ein Prozess $(V(t), t \geq 0)$ mit

   $$V(t) = W(t)(1 - W(t)), \quad t \geq 0.$$

   i. Berechnen Sie $E[V(t)]$ für alle $t \geq 0$.

   ii. Berechnen Sie $E[V(t)|\mathcal{F}(s)]$ für $0 < s < t$.

   (c) Ist der Prozess V ein

   □ Martingal, □ Submartingal, □ Supermartingal, □ nichts davon?

   Hier nur ankreuzen, eine Begründung ist nicht erforderlich.

   (d) Gegeben sei der Prozess $(M(t), t \geq 0)$ mit

   $$M(t) = \int_0^t s(W(s) - s)dW(s), \quad t \geq 0.$$

   Berechnen Sie $\mathrm{Var}[M(1)]$ für $t \geq 0$ mit der Ito-Isometrie.

   (e) Gegeben seien reelle Konstante $r \geq 0$ und $\sigma > 0$ und ein Prozess $(S(t), t \geq 0)$ mit

   $$S(t) = e^{\sigma W(t) - \frac{\sigma^2}{2}t}, \quad t \geq 0.$$

   Zeigen Sie durch Anwendung der Ito-Formel, dass der Prozess eine Darstellung der Form

   $$S(t) = S(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s), \quad t \geq 0$$

   hat, und geben Sie Ausdrücke für

   $S(0) =$ __________, $a(s) =$ ________________, $b(s) =$ ______________________

   an.

2. $A \sim N(0,\sigma^2)$, $B \sim N(0,\sigma^2)$ seien zwei unabhängig normal verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mathrm{E}\,A = \mathrm{E}\,B = 0$ und Varianz $\mathrm{Var}(A) = \mathrm{Var}(B) = \sigma^2 > 0$. Betrachten Sie den Prozess

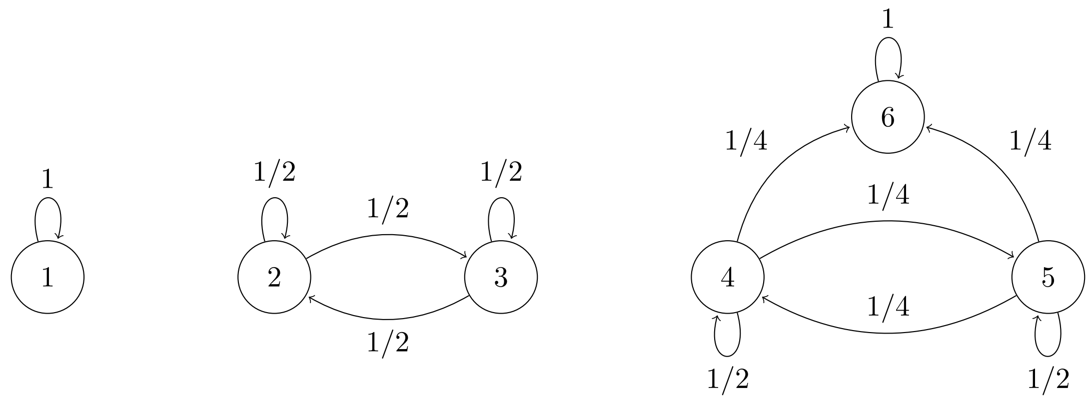
$$x_t = A\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + B\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),\ t \in \mathbb{Z}$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbf{E}x_t$ und die Kovarianz $\mathrm{Cov}(x_t, x_s)$ für $t,\ s \in \mathbb{Z}$.
Hinweis: $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b))$, $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$.

(b) Zeigen Sie, dass der Prozess stationär ist und geben Sie die Autokovarianzfunktion und die Autokorrelationsfunktion des Prozesses an. Zeigen Sie insbesondere, dass die Autokorrelation zum Lag 4 gleich minus Eins ist: $\mathrm{Corr}(x_{t+4}, x_t) = -1$!

(c) Zeigen Sie, dass der Prozess exakt prognostizierbar ist. D.h. zeigen Sie, dass die Einschrittprognose aus k vergangenen Werten $\hat{x}_{t+1} = c_0 + c_1 x_t + \cdots + c_k x_{t+1-k}$ für ein $k \in \mathbb{N}$ (das genügend groß ist) perfekt ist: $\hat{x}_{t+1} = x_{t+1}$!

3. Gegeben sei eine Markovkette $(Y_n)_{n\geq 0}$ mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Anfangsverteilung $\lambda = (6/21, 5/21, 4/21, 3/21, 2/21, 1/21)$ und folgendem Übergangsgraph:



(a) Berechnen Sie $\mathbb{P}[X_2 = 6, X_1 = 5, X_0 = 4]$ und $\mathbb{P}[X_2 = 6 | X_1 = 5, X_0 = 4]$.

(b) Es sei H die Trefferzeit für den Zustand 6, also

$$H = \inf\{n \geq 0 : X_n = 6\}.$$

Geben die Trefferwahrscheinlichkeiten $(h_1, \ldots, h_6)$ an. Hinweis: Sie müssen dazu nicht unbedingt ein 6×6-Gleichungssystem lösen, manche Komponenten sind ziemlich offensichtlich.

(c) Wieviele Kommunikationsklassen hat die Kette? Ist sie irreduzibel? Bei dieser Teilaufgabe ist keine Begründung erforderlich.

(d) Welche Zustände sind rekurrent, welche sind transient? Geben Sie bei dieser Teilaufgabe eine schlüssige Begründung an. Bloßes Aufschreiben der Definition von Rekurrenz und Transienz oder eine Umformulierung davon bringt allerdings überhaupt keine Punkte!

(e) Berechnen Sie die Verteilung von X_2, also $\mathbb{P}[X_2 = i]$ für alle $i \in I$.

4. In dieser Aufgabe betrachten wir den AR(1) Prozess

$$x_t = \frac{2}{3}x_{t-1} + \epsilon_t, \;\; (\epsilon_t) \sim \mathrm{WN}(\sigma^2 = \frac{5}{9}) \tag{1}$$

(a) Überprüfen Sie die Stabilitätsbedingung für das AR System (1).

(b) Zeigen Sie, dass die Autokovarianzfunktion von (x_t) gegeben ist durch:

$$\gamma_x(k) = \mathrm{Cov}(x_{t+k}, x_t) = \left(\frac{2}{3}\right)^{|k|}$$

Hinweis: Yule-Walker Gleichungen.

(c) Berechnen Sie die Zweischrittprognose $\hat{x}_{t+2} = c_0 + c_1 x_t$ für x_{t+2} aus einem vergangenen Wert $(h = 2, k = 1)$. Geben Sie die Koeffizienten c_0, c_1 und die Varianz des entsprechenden Prognosefehlers an.

(d) Wir betrachten nun noch den Differenzenprozess

$$y_t = (x_t - x_{t-1}), \;\; t \in \mathbb{Z}$$

Zeigen Sie, dass die Autokovarianzfunktion von (y_t) gegeben ist durch:

$$\gamma_y(k) = \mathrm{Cov}(y_{t+k}, y_t) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{für } k = 0 \\ \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{|k|} & \text{für } |k| > 0 \end{cases}$$