Name:

Mat.Nr.:

Bitte keinen Rotstift verwenden!

Finanzmathematik 1: diskrete Modelle (Vorlesungsprüfung) 12. September 2023

Dauer: 120 Minuten

Bei der schriftlichen Prüfung darf ein nicht programmierbarer Taschenrechner benutzt werden.

Frage.	Max.	Punkte
1	20	
2	25	
3	30	
4	25	
$\sum$	100	

Note:

Notenschlüssel: nicht genügend: 0-59,5, genügend: 60-69,5, befriedigend: 70-79,5, gut: 80-89,5, sehr gut: 90-100

1. **Mehr-Perioden-Modell**

Sei $r > -1$ der Zinssatz, i.e., $S_n^0 = e^{rn}$. Sei U_i i.i.d., $U \sim N(0,1)$ und

$$S_n = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) n + \sigma \sum_{i=1}^{n} U_i\right), \quad 0 \leq n \leq N.$$

Sei die Filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, \cdots, S_n)$.

(1) Zeige, dass das Modell arbitragefrei ist. 4 Pkt

(2) Was ist das äquivalente Martingalmaß in diesem Modell? 1 Pkt

(3) Zeige

$$\mathbb{E}\left[e^{-r(N-n)}(S_N - K)_+ \middle| \mathcal{F}_n\right] = S_n \Phi(d_+) - K e^{-r(N-n)} \Phi(d_-),$$

mit der Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

und

$$d_+ = \frac{\ln\left(\frac{S_n}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(N-n)}{\sigma\sqrt{N-n}}, \quad d_- = d_+ - \sigma\sqrt{N-n}.$$

10 Pkt

(4) Was haben wir oben berechnet? Was ist die finanzmathematische Interpretation dafür? 2 Pkt

(5) Vergleichen Sie die Formel mit der Black-Scholes Formel, Ähnlichkeit und Unterschied. 3 Pkt

2. **Theoriefragen: Mehr-Perioden-Modell**

(1) **Das Modell**

(a) Was ist eine selbstfinanzierende Handelsstrategie? 2 Pkt

(b) Definieren Sie den diskontierten Wertprozess V mit der Handelsstrategie $\overline{\xi}$ und dem diskontierten Preisprozess X und stellen Sie diesen diskontierten Wertprozess als ein diskretes stochastisches Integral dar. 2 Pkt

(c) Was bedeutet eine Arbitragemöglichkeit im Mehr-Perioden-Modell? 1 Pkt

(2) **Der erste Hauptsatz**

(a) Formulieren Sie die Aussage über die *Lokalisierung der Arbitrage*. 2 Pkt

(b) Formulieren Sie den *ersten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten* (auch die notwendige Definition, z.B. äquivalentes Martingalmaß). 2 Pkt

(c) Beweisen Sie die einfachere Richtung des ersten Hauptsatzes. 3 Pkt

(3) **Die Superreplizierung (Superhedging)**

(a) Erklären Sie den Begriff Superhedging eines Zahlungsanspruchs C. Wer treibt Superhedging in der Regel? 2 Pkt

(b) Geben Sie eine untere Schranke fürs Anfangskapital von der Superhedging-Strategie und beweisen Sie Ihre Antwort. 3 Pkt

(4) **Die Erreichbarkeit und die Vollständigkeit**

(a) Definieren Sie die Erreichbarkeit eines diskontierten Zahlungsanspruchs H und die Vollständigkeit eines Marktmodells. 2 Pkt

(b) Formulieren Sie den *zweiten Hauptsatz zur Bewertung von Finanzinstrumenten*. 2 Pkt

(c) Beweisen Sie, dass ein erreichbarer diskontierter Zahlungsanspruch integrierbar bezüglich äquivalenter Martingalmaße. 1 Pkt

(d) Beweisen Sie, dass alle replizierenden Handelsstrategien für den erreichbaren diskontierten Zahlungsanspruch H den gleichen Wertprozess hat. 2 Pkt

(e) Geben Sie eine Darstellung für diesen Wertprozess mit Hilfe der äquivalenten Martingalmaße. 1 Pkt

3. **Amerikanische Option: Theorie und ein konkretes Beispiel**

Betrachten Sie das folgende Zwei-Perioden-Modell mit einer risikolosen Anlage S^0 und einer risikobehafteten Anlage S. Desweiteren sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $\mathbb{P}(\omega_i) > 0$ für $i \in \{1, ..., 4\}$.

$$
\begin{tikzcd}
S_0^0 = 1 \arrow[r] & S_1^0 = \frac{4}{3} \arrow[r] & S_2^0 = \frac{5}{3}
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& & S_2(\omega_1) = 240 \\
& S_1(\omega_{1,2}) = 160 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S_0 = 100 \arrow[ur] \arrow[dr] & & S_2(\omega_{2,3}) = 120 \\
& S_1(\omega_{3,4}) = 80 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & S_2(\omega_4) = 80
\end{tikzcd}
$$

(1) **Das Modell:**

(a) Schreiben Sie die von S erzeugte Filtrierung explizit hin. 1 Pkt

(b) Ist das Model arbitragefrei, vollständig?
Bestimmen Sie die äquivalenten Martingalmaße, falls sie existieren. Identifizieren Sie dabei $\mathbb{P}^*$ mit $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathbb{R}^4$, wobei $p_i = \mathbb{P}^*[\{\omega_i\}]$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Eindeutig? 4 Pkt

(2) **Amerikanische Option:**

(a) Betrachten Sie eine amerikanische Verkaufsoption mit dem Ausübungspreis $K = 100$ und bestimmen Sie die diskontierten Preise der amerikanischen Option zur Zeit $t = 0, 1, 2$. 6 Pkt

(b) Berechnen Sie die minimale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\min}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\min}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt

(c) Was ist die Doob-Zerlegung eines Supermartingals? Bestimmen Sie die Doob-Zerlegung des diskontierten Preisprozesses. 6 Pkt

(d) Berechnen Sie die maximale optimale Ausübungsstrategie $\tau_{\max}$, d.h. bestimmen Sie $\tau_{\max}(\omega_i)$, $i = 1, ..., 4$. 1 Pkt

(e) Bestimmen Sie die Hedgingsstrategie des Verkäufers. 6 Pkt

(f) Wann gibt es eine Arbitragemöglichkeit für den Verkäufer? Begründen Sie Ihre Antwort. Was sind die Arbitragemöglichkeiten in diesen Situationen? 5 Pkt

4. **Portfoliooptimierung**

Es sei $x_0 > 0$ das Anfangsvermögen. Lösen Sie das Problem der Endnutzenmaximierung mit logarithmischer Nutzenfunktion:

$$\begin{aligned}(\mathrm{P}): \qquad & \max \mathbb{E}[\ln(V_T^{\xi})] \\ & \text{s.t. } V_0^{\overline{\xi}} \leq x_0, \quad \overline{\xi} \text{ selbstfinanzierende Handelsstrategie mit } V_T^{\overline{\xi}} > 0.\end{aligned}$$

Betrachten Sie ein Cox-Ross-Rubinstein-Modell.

(1) Zeigen Sie, dass $\ln(\cdot)$ eine Nutzenfunktion ist. (Wie lautet die Definition einer Nutzenfunktion?) Wie interpretieren wir eine Nutzenfunktion? 4 Pkt

(2) Was ist ein Cox-Ross-Rubinstein-Modell? Unter welchen Bedingungen an Parameter r, u, d ist das Modell arbitragefrei? 3 Pkt

(3) Zeigen Sie, dass das Problem (P) nicht lösbar ist, falls es eine Arbitragemöglichkeit gibt. 5 Pkt

(4) Bestimmen Sie unter (NA) das optimale Endvermögen $V_T^{\overline{\xi}^*}$ von (P). 5 Pkt

(5) Bestimmen Sie unter (NA) die optimale Handelsstrategie. 8 Pkt